



9

# REGRESI DAN KORELASI LINIER BERGANDA



## PENGERTIAN REGRESI BERGANDA

Pembahasan akan meliputi regresi linier dengan 2 atau lebih Variabel Bebas ( $X_1$ ,  $X_2$ , dan  $X_n$ ) dan satu Variabel Tak Bebas ( $Y$ )

**Persamaan  
Matematik**



**Pengaruh**



**> 2 Variabel X**

Analisis Regresi ganda ialah suatu alat analisis peramalan (hubungan) nilai pengaruh dua variabel bebas atau lebih terhadap variabel terikat untuk membuktikan ada atau tidaknya hubungan fungsi atau hubungan kausal antara dua atau lebih variabel bebas ( $x$ ) dengan satu variabel terikat ( $Y$ ).

## REGRESI LINIER BERGANDA

- Bentuk Umum **Regresi Linier Berganda**

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_nX_n$$

Y : peubah takbebas

a : konstanta

$X_1$  : peubah bebas ke-1

$b_1$  : kemiringan ke-1

$X_2$  : peubah bebas ke-2

$b_2$  : kemiringan ke-2

$X_n$  : peubah bebas ke-n

$b_n$  : kemiringan ke-n

- Untuk regresi linier berganda dengan 2 Variabel Bebas ( $X_1$  dan  $X_2$ ) dan 1 Variabel Tak Bebas (Y).

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2$$

## REGRESI LINIER BERGANDA

$$Y = a + b_1 X_1 + b_2 X_2$$

a , b<sub>1</sub> dan b<sub>2</sub> didapatkan dengan menyelesaikan tiga persamaan Normal berikut:

$$(i) \quad n a + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} = \sum_{i=1}^n y_i \quad \dots(1)$$

$$(ii) \quad a \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} x_{1i} = \sum_{i=1}^n x_{1i} y_i \quad \dots(2)$$

$$(iii) \quad a \sum_{i=1}^n x_{2i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{2i} x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 = \sum_{i=1}^n x_{2i} y_i \quad \dots(3)$$

n : banyak pasangan data

x<sub>1i</sub> : nilai peubah bebas X<sub>1</sub> ke-i

y<sub>i</sub> : nilai peubah takbebas Y ke-i

x<sub>2i</sub> : nilai peubah bebas X<sub>2</sub> ke-i

## TAHAP PENYELESAIAN PERSAMAAN REGRESI BERGANDA

Selesaikan persamaan regresi yang didapat dengan:

- Eliminasi persamaan
- Eliminasi Gauss Jordan atau dengan dengan konsep matrik segitiga atas atau bawah
- Substitusi Persamaan

# TAHAP PENYELESAIAN PERSAMAAN REGRESI BERGANDA DENGAN ELIMINASI

Eliminasi Persamaan (1), (2), dan (3)

Eliminasi antar persamaan (1) dan (2), mengeliminasi nilai (a) didapat persamaan (4)

Eliminasi antarpersamaan (1) dan (3), mengeliminasi nilai (a) didapat persamaan (5)

Eliminasi antarpersamaan (4) dan (5), mengeliminasi nilai (b<sub>1</sub>) didapat nilai (b<sub>2</sub>)

Persamaan (4) atau (5), mencari nilai (b<sub>1</sub>)

Persamaan (1), (2) atau (3) mencari nilai (a)

## REGRESI LINIER BERGANDA (CONTOH 1)

Berikut adalah data Volume Penjualan (juta unit) Mobil dihubungkan dengan variabel biaya promosi ( $X_1$  dalam juta rupiah/tahun) dan variabel biaya penambahan asesoris ( $X_2$  dalam ratusan ribu rupiah/unit).

$X_1$	$X_2$	$y$	$X_1 X_2$	$X_1 y$	$X_2 y$	$X_1^2$	$X_2^2$	$y^2$
2	3	4	6	8	12	4	9	16
3	4	5	12	15	20	9	16	25
5	6	8	30	40	48	25	36	64
6	8	10	48	60	80	36	64	100
7	9	11	63	77	99	49	81	121
8	10	12	80	96	120	64	100	144

$$\sum X_1 = 31 \quad \sum X_2 = 40 \quad \sum y = 50 \quad \sum X_1 X_2 = 239 \quad \sum X_1 y = 296 \quad \sum X_2 y = 379 \quad \sum X_1^2 = 187 \quad \sum X_2^2 = 306 \quad \sum y^2 = 470$$

Tetapkan Persamaan Regresi Linier Berganda  $Y = a + b_1 X_1 + b_2 X_2$



## REGRESI LINIER BERGANDA

Masukkan notasi-notasi ini dalam ketiga persamaan normal,

$$(i) \quad n a + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$(ii) \quad a \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} x_{1i} = \sum_{i=1}^n x_{1i} y_i$$

$$(iii) \quad a \sum_{i=1}^n x_{2i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{2i} x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 = \sum_{i=1}^n x_{2i} y_i$$

Sehingga didapatkan tiga persamaan berikut:

$$\begin{array}{rcccccc} (i) & 6a & + & 31 b_1 & + & 40 b_2 & = & 50 \\ (ii) & 31 a & + & 187 b_1 & + & 239 b_2 & = & 296 \\ (iii) & 40 a & + & 239 b_1 & + & 306 b_2 & = & 379 \end{array}$$

## REGRESI LINIER BERGANDA

Lakukan Eliminasi, untuk menghilangkan (a)

$$\begin{array}{rclclclcl}
 \text{(ii)} & 31 a & + & 187 b_1 & + & 239 b_2 & = & 296 & \times 6 \\
 \text{(i)} & 6a & + & 31 b_1 & + & 40 b_2 & = & 50 & \times 31
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclclcl}
 \text{(ii)} & \cancel{-189 a} & + & 1122 b_1 & + & 1434 b_2 & = & 1776 \\
 \text{(i)} & \cancel{-189 a} & + & 961 b_1 & + & 1240 b_2 & = & 1550
 \end{array}$$

---


$$\text{(iv)} \quad 161b_1 + 194 b_2 = 226$$

Lalu

$$\begin{array}{rclclclcl}
 \text{(iii)} & 40 a & + & 239 b_1 & + & 306 b_2 & = & 379 & \times 6 \\
 \text{(i)} & 6a & + & 31 b_1 & + & 40 b_2 & = & 50 & \times 40
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclclcl}
 \text{(iii)} & \cancel{-240 a} & + & 1434 b_1 & + & 1836 b_2 & = & 2274 \\
 \text{(i)} & \cancel{-240 a} & + & 1240 b_1 & + & 1600 b_2 & = & 2000
 \end{array}$$

---


$$\text{(v)} \quad 194 b_1 + 236 b_2 = 274$$

## REGRESI LINIER BERGANDA

Selanjutnya, eliminasi ( $b_1$ ) dan dapatkan nilai ( $b_2$ )

$$\begin{array}{rclclcl}
 \text{(v)} & 194 & b_1 & + & 236 & b_2 & = & 274 & \times & 161 \\
 \text{(iv)} & 161 & b_1 & + & 194 & b_2 & = & 226 & \times & 194 \\
 \\ 
 \text{(v)} & \cancel{31234} & \cancel{b_1} & + & 37996 & b_2 & = & 44114 & & \\
 \text{(iv)} & \cancel{31234} & \cancel{b_1} & + & 37636 & b_2 & = & 43844 & & \\
 \hline
 & & & & 360 & b_2 & = & 270 & & \\
 & & & & & b_2 & = & 0.75 & & 
 \end{array}$$

Dapatkan Nilai ( $b_1$ ) dan nilai ( $a$ ) dengan melakukan substitusi, sehingga:

$$\text{(v)} \quad 194 b_1 + 236 b_2 = 274$$

Perhatikan  $b_2 = 0.75$

$$\begin{array}{rclclcl}
 194 & b_1 & + & 236 (0.75) & = & 274 \\
 194 & b_1 & + & 177 & = & 274 \\
 & & & & & 194 b_1 = 97 \\
 & & & & & b_1 = 0.50
 \end{array}$$

Perhatikan  $b_1 = 0.50$  dan  $b_2 = 0.75$

$$\begin{array}{rclclcl}
 6a & + & 31(0.50) & + & 40 (0.75) & = & 50 \\
 6a & + & 15.5 & + & 30 & = & 50 \\
 & & & & 6a & = & 4.5 \\
 & & & & a & = & 0.75
 \end{array}$$

## REGRESI LINIER BERGANDA

Didapat nilai masing-masing  $a$ ,  $b_1$  dan  $b_2$

$$a = 0,95 \quad b_1 = 0,5 \quad b_2 = 0,75,$$

Sehingga Persamaan Regresi Berganda

$$Y = a + b_1 X_1 + b_2 X_2$$

$$Y = 0.75 + 0.50 X_1 + 0.75 X_2$$

## PENGERTIAN **KORELASI BERGANDA**

Korelasi berganda (multiple correlation) merupakan korelasi yang terdiri dari dua variabel bebas ( $X_1$ ,  $X_2$ ) atau lebih, serta satu variabel terikat ( $Y$ ). Apabila perumusan masalahnya terdiri dari tiga masalah atau lebih, dan hubungan masing masing variabel di hitung menggunakan korelasi sederhana maka diperoleh alur hubungan antar masing masing variabel.

## KORELASI LINIER BERGANDA

Koefisien Determinasi Sampel untuk Regresi Linier Berganda diberi notasi sebagai berikut:

$$R_{y.12}^2$$

Sedangkan Koefisien Korelasi adalah akar positif Koefisien Determinasi atau

$$r_{y.12} = \sqrt{R_{y.12}^2}$$

Model

$$R_{y.12}^2 = 1 - \frac{JKG}{(n-1)s_y^2}$$

JKG : Jumlah Kuadrat Galat

$s_y^2$  : Jumlah Kuadrat y (terkoreksi)

di mana

$$s_y^2 = \frac{n \sum y^2 - (\sum y)^2}{n(n-1)}$$

$$JKG = \sum y^2 - a \sum y - b_1 \sum x_1 y - b_2 \sum x_2 y$$

## KORELASI LINIER BERGANDA (CONTOH)

Dari contoh persamaan regresi di atas diketahui ( $n = 6$ )

$$\sum x_1 = 31$$

$$\sum x_2 = 40$$

$$\sum y = 50$$

$$\sum x_1 x_2 = 239$$

$$\sum x_1 y = 296$$

$$\sum x_2 y = 379$$

$$\sum x_1^2 = 187$$

$$\sum x_2^2 = 306$$

$$\sum y^2 = 470$$

Maka tetapkan  $R_{y.12}^2$  dan jelaskan artinya nilai tersebut!

## KORELASI LINIER BERGANDA (CONTOH)

$$s_y^2 = \frac{n \sum y^2 - (\sum y)^2}{n(n-1)} = \frac{6(470) - (50)^2}{6(6-5)} = \frac{2820 - 2500}{30} = \frac{320}{30} = 10.667$$

$$\begin{aligned} JKG &= \sum y^2 - a \sum y - b_1 \sum x_1 y - b_2 \sum x_2 y = 470 - 0.75(50) - 0.5(296) - 0.75(379) \\ &= 470 - 37.5 - 148 - 284.25 \\ &= 0.25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{y.12}^2 &= 1 - \frac{JKG}{(n-1)s_y^2} = 1 - \frac{0.25}{5 \times 10.667} = 1 - \frac{0.25}{53.333} \\ &= 1 - 0.0046875 \\ &= 0.9953125 \\ &= 99.53\% \end{aligned}$$



## KORELASI LINIER BERGANDA (CONTOH)

- Nilai  $R^2_{y.12} = 99.53\%$  menunjukkan bahwa 99.53% proporsi keragaman nilai peubah Y (volume penjualan) dapat dijelaskan oleh nilai peubah  $X_1$  (biaya promosi) dan  $X_2$  (biaya aksesoris) melalui hubungan linier.
- Sisanya sebesar 0.47% dijelaskan oleh hal-hal lain.

## REGRESI LINIER BERGANDA (CONTOH 2)

Tetapkan Persamaan Regresi Linier Berganda  $Y = a + b_1 X_1 + b_2 X_2$

### Data Kasus

<b>No. Responden</b>	<b>Promosi (X1)</b>	<b>Harga (X2)</b>	<b>Keputusan Konsumen (Y)</b>
1	10	7	23
2	2	3	7
3	4	2	15
4	6	4	17
5	8	6	23
6	7	5	22
7	4	3	10
8	6	3	14
9	7	4	20
10	6	3	19
Jumlah	60	40	170

## REGRESI LINIER BERGANDA (CONTOH 2)

**Tabel Pembantu**

No. Resp.	$X_1$	$X_2$	Y	$X_1Y$	$X_2Y$	$X_1X_2$	$X_1^2$	$X_2^2$
1	10	7	23	230	161	70	100	49
2	2	3	7	14	21	6	4	9
3	4	2	15	60	30	8	16	4
4	6	4	17	102	68	24	36	16
5	8	6	23	184	138	48	64	36
6	7	5	22	154	110	35	49	25
7	4	3	10	40	30	12	16	9
8	6	3	14	84	42	18	36	9
9	7	4	20	140	80	28	49	16
10	6	3	19	114	57	18	36	9
Jumlah	60	40	170	1122	737	267	406	182

## REGRESI LINIER BERGANDA (CONTOH 2)

$$n a + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} = \sum_{i=1}^n y_i \quad (\text{i})$$

$$a \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} x_{1i} = \sum_{i=1}^n x_{1i} y_i \quad (\text{ii})$$

$$a \sum_{i=1}^n x_{2i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{2i} x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 = \sum_{i=1}^n x_{2i} y_i \quad (\text{iii})$$

$$10 a + 60 b_1 + 40 b_2 = 170 \quad (1)$$

$$60 a + 406 b_1 + 267 b_2 = 1122 \quad (2)$$

$$40 a + 267 b_1 + 182 b_2 = 737 \quad (3)$$

## REGRESI LINIER BERGANDA (CONTOH 2)

Persamaan (1) dikalikan 6, persamaan (2) dikalikan 1:

$$\begin{array}{rcl} 60 a + 360 b_1 & + 240 b_2 & = 1020 \\ 60 a + 406 b_1 & + 267 b_2 & = 35163 \\ \hline 0 a + -46 b_1 + -27 b_2 & & = -102 \\ -46 b_1 - 27 b_2 & & = -102 \quad \dots\dots\dots (4) \end{array}$$

Persamaan (1) dikalikan 4, persamaan (3) dikalikan 1:

$$\begin{array}{rcl} 40 a + 240 b_1 & + 160 b_2 & = 680 \\ 40 a + 267 b_1 & + 182 b_2 & = 737 \\ \hline 0 a + -27 b_1 & + -22 b_2 & = -57 \\ -27 b_1 - 22 b_2 & & = -57 \quad \dots\dots\dots (5) \end{array}$$

## REGRESI LINIER BERGANDA (CONTOH 2)

Persamaan (4) dikalikan 27, persamaan (5) dikalikan 46:

$$\begin{array}{rcl} -1242 b_1 - 729 b_2 & = & -2754 \\ -1242 b_1 - 1012 b_2 & = & -2622 \\ \hline 0 b_1 + 283 b_2 & = & -132 \\ b_2 & = & -132:283 = -0,466 \end{array}$$

Harga  $b_2$  dimasukkan ke dalam salah satu persamaan (4) atau (5):

$$\begin{array}{rcl} -46 b_1 - 27 (-0,466) & = & -102 \\ -46 b_1 + 12,582 & = & -102 \\ 114,582 & = & 46 b_1 \\ b_1 & = & 2,4909 \end{array}$$

## REGRESI LINIER BERGANDA (CONTOH 2)

Harga  $b_1$  dan  $b_2$  dimasukkan ke dalam persamaan 1:

$$\begin{aligned}10 a + 60 (2,4909) + 40 (-0,466) &= 170 \\10 a + 149,454 - 18,640 &= 170 \\170 - 149,454 + 18,640 &= 10 a \\a &= 39,186 : 10 = 3,9186\end{aligned}$$

**Jadi:**

$$\begin{aligned}a &= 3,9186 \\b_1 &= 2,4909 \\b_2 &= -0,466\end{aligned}$$

Persamaan Regresi Linier Berganda  $Y = 3,9186 + 2,4909 X_1 - 0,466 X_2$

