6

DISTRIBUSI PROBABILITAS DISKRIT

PROBABILITAS DISKRIT

Jika suatu ruang sampel mengandung titik sampel yang berhingga banyaknya atau anggotanya sama banyaknya dengan bilangan asli maka ruang sampel itu disebut **ruang sampel diskrit** dan variabel random yang didefinisikan pada ruang sampel diskrit disebut **variabel random diskrit.**

Suatu variabel random diskrit mempunyai nilai dengan probabilitas tertentu .

Contoh III. 5

Dalam percobaan melantunkan satu mata uang ”jujur” tiga kali. Variabel random *Y menyatakan banyak ”muka” yang muncul maka* dapat ditentukan probabilitas mendapat *Y ”muka”. Tabel berikut ini* menyatakan probabilitas mendapatkan *Y ”muka”.*

Y	0	1	2	3
P(Y=y)	1/8	3/8	3/8	1/8

Definisi

Fungsi *f(y)* adalah suatu fungsi probabilitas atau distribusi atau distribusi probabilitas dari suatu variabel random *Y* bila untuk setiap hasil yang mungkin

1. $f(y) \geq 0$.
2. $\sum_y f(y) = 1$
3. $P(Y=y) = f(y)$

Contoh. Variabel random Y mempunyai fungsi probabilitas yang didefinisikan sebagai

$$f(y) = 2^{-y}$$

untuk y = 1,2,3, …. Tentukan

a. $P(Y \leq -3)$.
b. $P(Y \leq 3)$, $P(Y < 3)$, $P(Y > 3)$.
c. $P(Y \geq 3)$.

Penyelesaian:

a. $P(Y \leq -3) = 0.$

a. $P(Y \leq 3) = P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3)$

$= (1/2) + (1/4) + (1/8)$

$= 7/8$

$P(Y < 3) = P(Y=1) + P(Y=2)$

$= (1/2) + (1/4)$

$= 3/4$

$P(Y > 3) = P(Y=4) + P(Y=5) + P(Y=6) + \ldots$

$= 1 - P(Y \leq 3)$

$= 1 - 7/8 = 1/8$

c. $P(Y \geq 3) = P (Y=3) + P(Y=4) + P(Y=5) + \ldots$

$= 1 - P(Y \leq 2)$

$= 1 - 3/4$

$= 1/4$

Distribusi Binomial

Distribusi Binomial adalah distribusi probabilitas diskret jumlah keberhasilan dalam n percobaan ya / tidak yang saling bebas, dimana setiap hasil percobaan memiliki probabilitas p.

Ciri-ciri percobaan binomial yaitu sebagai berikut.

1. Setiap percobaan dibedakan menjadi 2 jenis kejadian yang keduanya saling lepas
2. Hasil dari percobaan tersebut hanya 2 macam, yaitu **berhasil (S = sukses)** dan **gagal (F)**
3. Peluang kejadian **berhasil adalah *p* = P(S)** dan peluang kejadian **gagal adalah P(F) = *q* = 1-*p***
4. Masing-masing percobaan bersifat saling bebas (Trial-trial itu independen), artinya hasil percobaan pertama tidak memengaruhi hasil percobaan berikutnya.

Distribusi Binomial

Konsep Distribusi Binomial (Lanjutan)

Jika percobaan binomial dilakukan berulang-ulang sampai n kali, peluang diperoleh sukses sebanyak x dapat dihitung dengan rumus berikut.

$$P(X = x) = b(x; n; p) = {}_nC_x \times p^x \times q^{n-x}$$

Keterangan :

n : banyak percobaan
x : banyak berhasil
p : peluang berhasil
q : peluang gagal (q = 1-p)

Distribusi Binomial

Contoh Soal Konsep Distrbusi Binomial Dan Pembahasan

Sebuah mata uang logam dilemparkan sebanyak 8 kali. Berapa peluang muncul gambar sebanyak 5 kali?

Diketahui :

n = 8
x = 5
p = 1/2
q = 1-p = 1- 1/2 = ½

Ditanya : peluang muncul gambar sebanyak 5 kali

$$P\left(X=x\right)=b\left(x;n;p\right)={}_{n}C_{x}\times p^{x}\times q^{n-x}$$

$$P(X=5)=b(5;8;\frac{1}{2}) \quad ={}_{8}C_{5}\times p^{5}\times q^{8-5}=\frac{8!}{5!\times 3!}\times(\frac{1}{2})^{5}\times(\frac{1}{2})^{3} \quad =\frac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1}\times\frac{1}{32}\times\frac{1}{8}=56\times\frac{1}{32}\times\frac{1}{8}=\frac{7}{32}$$

Jawab : Jadi, peluang muncul gambar sebanyak 5 kali adalah 7/32

DISTRIBUSI BINOMIAL NEGATIF (Bernoulli)

Distribusi binomial negatif adalah distribusi hasil **Percobaan Bernoulli** yang diulang sampai mendapatkan sukses ke-k.

$$f(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k} & x = k, k+1, k+2, \ldots \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Keterangan notasi:

p = peluang sukses

x = jumlah percobaan sampai mendapatkan sukses ke-k

k = jumlah sukses yang muncul

DISTRIBUSI BINOMIAL NEGATIF (Bernoulli)

- **Contoh**
- Probabilitas bahwa seseorang yang melantunkan tiga uang logam sekaligus akan mendapatkan semuanya muka atau semuanya belakang untuk kedua kalinya pada lantunan kelima a
  Diketahui;
- X = 5; k = 2; p = ¼
- P (x=5; 2; ¼) = $\binom{4}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{3}$

  = 27/256

$$f(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k} & x = k, k+1, k+2, \ldots \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Keterangan notasi:
p = peluang sukses
x = jumlah percobaan sampai mendapatkan sukses ke-k
k = jumlah sukses yang muncul

Distribusi Geometrik

Distribusi geometrik adalah kasus khusus dari distribusi binomial negatif untuk k=1, yaitu distribusi peluang banyaknya usaha yang diperlukan untuk mendapatkan sukses pertama. Dengan kata lain distribusi ini mewakili suatu kejadian random hingga sukses yang pertama kali terjadi. diberikan Fungsi distribusi probabilitas geometrik :

$$f(x) = g(x;p) = pq^{x-1}; \text{untuk } x = 1,2,3\ldots$$

Contoh

Dalam suatu proses produksi diketahui bahwa rata-rata 1 diantara 100 butir hasil produksi adalah cacat. Probabilitas memeriksa 5 barang dan baru menemukan barang yang cacat pada pemeriksaan yang kelima ?

- **Penyelesaian :**

Variabel random *Y menyatakan banyaknya pemeriksaan yang harus* dilakukan sampai mendapatkan barang cacat yang pertama. Probabilitas menemukan barang cacat yang pertama pada pemeriksaan kelima adalah

$$P(x=5) = g(5;0,01) = (0,01)(0,99)^4 = 0,0096$$

Distribusi Hipergeometrik

Distribusi peluang peubah acak hipergeometrik adalah banyaknya sukses ***x*** dalam sampel acak ukuran **n** yang diambil dari populasi sebanyak **N** yang mengandung jumlah sukses sebanyak **k**.

$$h(x; N, n, k) = \begin{cases} \dfrac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} & , x = 1, 2, \cdots, n \\ 0 & , x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Keterangan:

N = Jumlah Populasi

n = Jumlah sampel

k = Jumlah sukses

x = Jumlah sukses terambil

Distribusi Poisson

Dalam teori probabilitas dan statistika, distribusi Poisson (dilafalkan [pwasɔ̃]) adalah distribusi probabilitas diskret yang menyatakan peluang jumlah peristiwa yang terjadi pada periode waktu tertentu apabila rata-rata kejadian tersebut diketahui dan dalam waktu yang saling bebas sejak kejadian terakhir. (distribusi Poisson juga dapat digunakan untuk jumlah kejadian pada interval tertentu seperti jarak, luas, atau volume).

$$f(k;\lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

- e adalah basis logaritma natural (e = 2.71828...)
- k adalah jumlah kejadian suatu peristiwa — peluang yang diberikan oleh fungsi ini
- $k!$ adalah faktorial dari k
- λ adalah bilangan riil positif, sama dengan nilai harapan peristiwa yang terjadi dalam interval tertentu. Misalnya, peristiwa yang terjadi rata-rata 4 kali per menit, dan akan dicari probabilitas terjadi peristiwa k kali dalam interval 10 menit, digunakan distribusi Poisson sebagai model dengan $\lambda = 10 \times 4 = 40$.

Sebagai fungsi **k**, ini disebut fungsi massa probabilitas. Distribusi Poisson dapat diturunkan sebagai kasus terbatas distribusi binomial. Distribusi Poisson dapat diterapkan pada sistem dengan kejadian berjumlah besar yang yang mungkin terjadi, yang mana kenyataannya cukup jarang. Contoh klasik adalah peluruhan nuklir atom

DISTRIBUSI PROBABILITAS KONTINU

Variabel random kontinu adalah variabel random yang mengambil harga pada sebarang harga dalam suatu interval.

Contoh

Panjang hidup *t* bola lampu merek ”XIYI” merupakan variabel random kontinu dengan *t > 0.*

Definisi

Fungsi *f(x)* disebut fungsi kepadatan probabilitas variabel random kontinu *X,* yang didefinisikan atas himpunan semua bilangan real **R** bila

$$\boldsymbol{f(x) \geq 0 \; untuk \; semua \; x \; \in R}$$

$$\int f(x)dx = 1$$

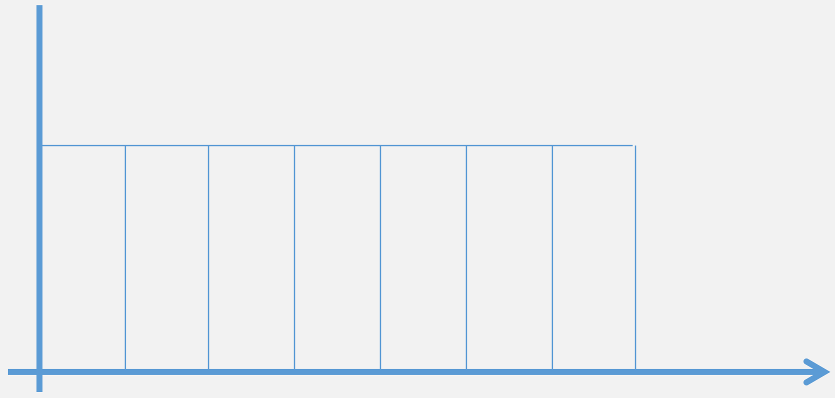
$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$$

DISTRIBUSI PROBABILITAS KONTINU

Distribusi Uniform (Seragam)

Bila variabel random X, mempunyai nilai $x_1, x_2, \ldots, x_k$, dengan peluang yang sama, maka peluang seragam diskret adalah:

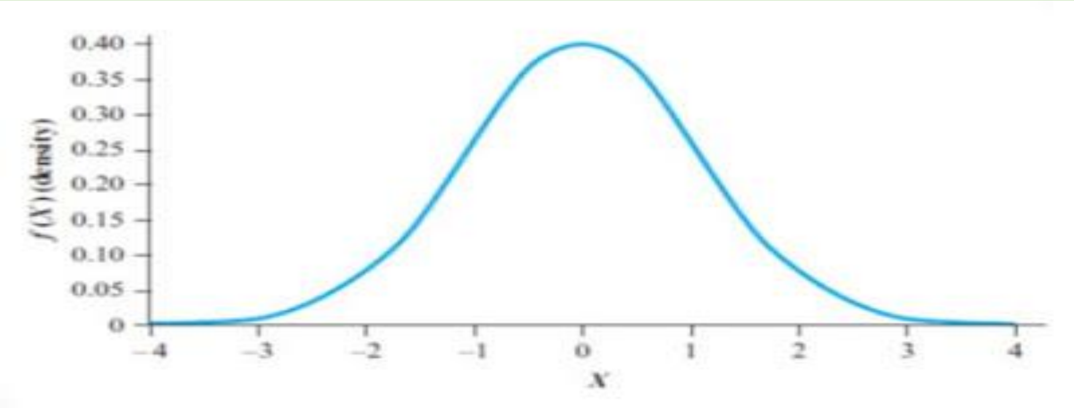
$$f(x;k) = \frac{1}{k}, \quad untuk\ x_1, x_2, \ldots, x_k.$$



DISTRIBUSI PROBABILITAS KONTINU

Konsep **Distribusi normal**

adalah distribusi data yang jika diterjemaahkan menjadi grafik ditandai oleh bentuk seperti lonceng yang sempurna.
Distribusi normal, disebut pula distribusi Gauss, adalah distribusi probabilitas yang paling banyak digunakan dalam berbagai analisis statistika. Distribusi normal baku adalah distribusi normal yang memiliki rata-rata nol dan simpangan baku satu.



Konsep Distribusi Normal (Lanjutan)

Secara Matematis dinyatakan dengan rumus:

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}(e)^{-(X-\mu)^2/2\sigma^2}$$

π dan *e adalah nilai konstan* (π = 3.1416 dan e = 2.7183)
μ adalah rata-rata dan σ adalah standar deviasi

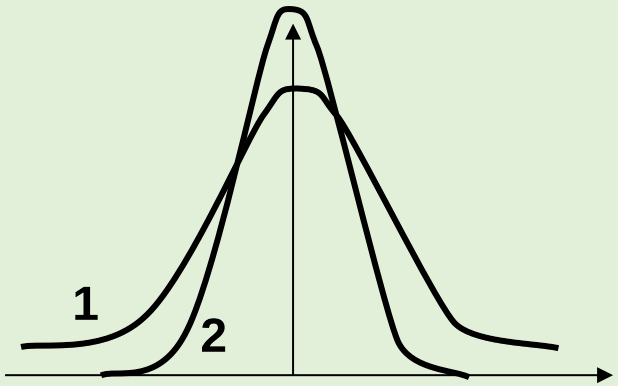
Mengapa mempelajari Distribusi Normal?
Kebanyakan variabel dependen (*dependent* variabel) diukur dan dianalisa dengan asumsi variabel tersebut memiliki distribusi normal. Dengan mengetahui distribusi normal, dapat diketahui posisi suatu nilai dalam data. Permasalahan pada data hasil pengukuran dapat diketahui dengan membandingkan data keseluruhan dengan kurva distribusi normal.

Sifat-Sifat Distribusi Normal:

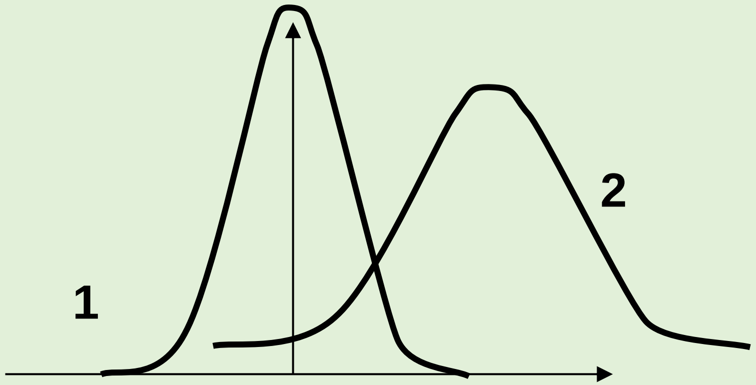
1. Rata-ratanya (mean) μ dan standard deviasinya = σ
2. Mode (maximum) terjadi di $x=\mu$
3. Bentuknya simetrik thd $x=\mu$
4. Titik belok tepat di $x=\mu\pm\sigma$
5. Kurva mendekati nol secara asimptotis semakin x jauh dari $x=\mu$
6. Total luasnya = 1

Sifat-Sifat Distribusi Normal:

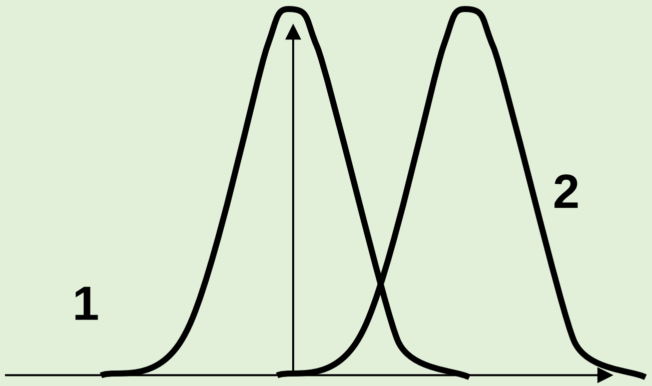
Bentuk distribusi normal ditentukan oleh μ dan σ.



$\mu_1 = \mu_2 \quad \sigma_1 > \sigma_2$



$\mu_1 < \mu_2 \quad \sigma_1 < \sigma_2$



$\mu_1 < \mu_2 \quad \sigma_1 = \sigma_2$