DISTRIBUSI PROBABILITAS DISKRIT

Misalkan sebuah eksperimen mempunyai ruang sampel *S*. Variabel random adalah fungsi berharga real yang didefinisikan pada ruang sampel *S*.

Contoh III.1

Suatu pemungutan suara dilakukan untuk memilih wakil rakyat di provinsi Jawa Tengah yang terdiri dari : Joko, Bambang dan Cokro. Kita tertarik untuk menyelidiki banyak suara yang memilih suatu wakil rakyat tertentu yang dicalonkan. Kejadian tersebut memunculkan adanya variabel random yaitu banyak suara di provinsi Jawa Tengah yang mencalonkan wakil rakyat tertentu.

Variabel random mempunyai akibat merubah kejadian dalam ruang sampel ke dalam kejadian numerik sehingga variabel random dapat dipandang sebagai

$$f : \text{Ruang Sampel } S \rightarrow \text{Real } \boldsymbol{R}.$$

Jika variabel random Y hanya dapat berharga sebanyak terbilang bilangan real maka Y disebut variabel random diskrit .

Contoh III .2 :

Banyak telur busuk dalam suatu kotak yang berisi 100 butir telur.

III.1 Distribusi Probabilitas dari Variabel Random Diskrit .

Contoh III .3 :

Seorang manajer mempunyai pekerja yang terdiri dari 2 wanita dan 3 pria. Ia ingin memilih dua pekerja untuk suatu pekerjaan khusus. Keputusan yang diambil adalah memilih secara random 2 pekerja dari pekerja yang dimilikinya. Jika Y adalah banyak wanita yang terpilih maka tentukan distribusi probabilitas Y.

Penyelesaian :

Dari 2 pekerja wanita dan 3 pekerja pria yang tersedia, banyaknya cara untuk memilih 2 pekerja adalah

$$\binom{5}{2}.$$

Dari 2 orang pekerja yang terpilih, banyak pekerja wanita Y yang terpilih dapat bernilai 0, 1 atau 2. Hal itu berarti jika terpilih 0 pekerja wanita maka banyak pekerja pria yang terpilih sebanyak 2 orang sehingga banyak cara terpilih 0 pekerja wanita dari 2 pekerja wanita yang tersedia dan 2 pekerja pria dari 3 pekerja pria yang tersedia adalah

$$\binom{2}{0}\binom{3}{2}.$$

Akibatnya probabilitas mendapatkan banyak pekerja wanita yang terpilih 0 adalah

$$P(Y=0)=\frac{\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{3}{10}.$$

Dengan cara yang sama probabilitas mendapatkan banyak pekerja wanita yang terpilih 1 orang adalah

$$P(Y=1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{6}{10}.$$

Probabilitas mendapatkan banyak pekerja wanita yang terpilih 2 orang adalah

$$P(Y=2)=\frac{\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{5}{2}}=\frac{1}{10}.$$

Distribusi probabilitas dari variabel random diskrit Y dapat dinyatakan dengan tabel dan rumus.

Distribusi probabilitas pada Contoh III.3, dapat dinyatakan dalam Tabel III. 1.

Tabel III. 1 Tabel distribusi probabilitas variable random *Y*.

Y	$P(Y = y)$
0	1/10
1	6/10
2	3/10

Distribusi probabilitas pada Contoh III.3 dapat dinyatakan dalam rumus :

$$f(y) = P(Y = y) = \frac{\binom{2}{y}\binom{3}{2-y}}{\binom{5}{2}}$$

untuk $y = 0, 1, 2$.

Dalam sebarang distribusi probabilitas diskrit berlaku sifat -sifat sebagai berikut :

1. $0 \leq p(y) \leq 1$ untuk semua y.
2. $\sum_y p(y) = 1$.

Catatan : Distribusi probabilitas yang didapatkan di atas merupakan model dan bukan merupakan pernyatan yang tepat untuk distribusi frekuensi dari data nyata yang terjadi di alam.

III.2 Variabel random

Misalkan sebuah eksperimen mempunyai ruang sampel *S*. Variabel random adalah fungsi berharga real yang didefinisikan atas ruang sampel *S*.

f : Ruang sampel $\rightarrow$ Himpunan Bilangan Real.

Contoh III. 4 :

Percobaan melanturkan satu mata uang tiga kali. Ruang sampel

S = { MMM, MMB, MBM , BMM , BMB, BBM, MBB, BBB }.

Apabila diinginkan untuk meneliti banyak ' muka ' yang muncul pada tiap titik sampel maka hasil numerik 0, 1, 2 atau 3 akan dikaitkan dengan titik sampel. Misalkan $Y(s)$ = banyak muka dalam S dengan $s \in S$. Fungsi

$$Y : S \rightarrow R$$

dengan $Y(s) = y$. Bilangan 0, 1, 2 dan 3 merupakan pengamatan yang mungkin .

Kejadian sederhana	Y
MMM	3
MMB	2
MBM	2
BMM	2
BBM	1
MBB	1
BMB	1
BBB	0

III.3 Distribusi Probabilitas Diskrit

Suatu variabel random diskrit mempunyai nilai dengan probabilitas tertentu .

Contoh III. 5

Dalam percobaan melantunkan satu mata uang "jujur" tiga kali. Variabel random Y menyatakan banyak "muka" yang muncul maka dapat ditentukan probabilitas mendapat Y "muka". Tabel berikut ini menyatakan probabilitas mendapatkan Y "muka".

Y	0	1	2	3
$P(Y=y)$	1/8	3/8	3/8	1/8

Definisi III.3

Fungsi $f(y)$ adalah suatu fungsi probabilitas atau distribusi atau distribusi probabilitas dari suatu variabel random Y bila untuk setiap hasil yang mungkin

1. $f(y) \geq 0$.
2. $\sum_{y} f(y) = 1$.
3. $P(\ Y = y\ ) = f(y)$.

Distribusi probabilitas dari variabel random diskrit Y dapat dinyatakan dengan rumus dan tabel. Distribusi probabilitas pada Contoh III.5 dapat dinyatakan sbb :

$$P(Y = y) = f(y) = \binom{3}{y}(1/2)^3 = \frac{\binom{3}{y}}{8} \qquad \text{untuk } y = 0, 1, 2, 3,$$

$$= 0 \qquad \text{untuk } y \text{ yang lain.}$$

Contoh III.6

Variabel random Y mempunyai fungsi probabilitas yang didefinisikan sebagai

$$f(y) = 2^{-y}$$

untuk $y = 1, 2, 3, \ldots$. Tentukan

a. $P(\ Y \leq -3\ )$.

b. $P(\ Y \leq 3\ )$, $P(Y < 3\ )$, $P(Y > 3)$.

c. $P($ Y bilangan genap).

Penyelesaian :

a. $P(Y \leq -3\ ) = 0$.

b. $P(Y \leq 3) = P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3)$

$= (\ ½\ ) + (1/4) + (1/8)$

$= 7/8$.

$P(Y < 3) = P(Y = 1) + P(Y = 2\ )$

$= (\ ½\ ) + (\ ¼\ )$

$= 3/4$.

$P(Y > 2) = P(\ Y = 3\ ) + P(Y = 4\ ) + P(\ Y = 5\ ) + \ldots\ldots$

$= 1 - [\, P(Y = 1) + P(Y = 2)\,]$
$= 1 - (1/2) - (1/4)$
$= 1/4.$

c. $P(Y \text{ bilangan genap}) = P(Y = 2) + P(Y = 4) + P(Y = 6) + \ldots.$
$= (1/4) + (1/16) + (1/32) + \ldots.$
$= (1/4)/(1-(1/4))$
$= (¼)/(3/4)$
$= 1/3.$

Jika suatu ruang sampel mengandung titik sampel yang berhingga banyaknya atau anggotanya sama banyaknya dengan bilangan asli maka ruang sampel itu disebut **ruang sampel diskrit** dan variabel random yang didefinisikan pada ruang sampel diskrit disebut **variabel random diskrit**. Contoh III.1 merupakan salah satu contoh variabel random diskrit .

Contoh III.7

Percobaan mengambil sebuah bolam dari suatu kotak yang berisi 5 bolam rusak dan 5 bolam baik dengan pengembalian sampai didapatkan bolam rusak .

Ruang sampel $S = \{$ R, BR , BBR , BBBR, … $\}$.

Variabel random $Y(s)$ adalah banyak pengambilan yang harus dilakukan sampai mendapatkan bolam rusak yang pertama dengan $s \in S$.

Y(R) = 1,
Y(BR) = 2,
Y(BBR) = 3,
....

$Y(s)$ merupakan variabel random diskrit pada ruang sampel diskrit S.

III.4 Distribusi Probabilitas Binomial

Eksperimen Binomial adalah eksperimen yang mempunyai sifat-sifat sebagai berikut :

1. Eksperimen mengandung n trial yang identik.
2. Setiap trial menghasilkan 2 hasil yang mungkin yang dinamakan sukses (S) dan tidak sukses (F).

3. Untuk tiap trial, probabilitas sukses adalah $p = P(S)$ dan probabilitas tidak sukses adalah $P(F) = 1 - p = q$.
4. Trial-trial itu independen.
5. Variabel random Y adalah banyak sukses yang ditemukan dalam n trial.

Contoh III. 4 :

Suatu sistem yang dapat mendeteksi pesawat terbang, mengandung 4 unit radar identik yang beroperasi secara independen satu dengan yang lain. Anggap masing-masing radar mempunyai probabilitas 0,95 untuk dapat mendeteksi pesawat terbang musuh. Pada saat pesawat terbang musuh memasuki daerah jangkauan sistem radar tersebut, kita tertarik untuk mengamati variabel random Y, yaitu banyak unit radar yang tidak mendeteksi pesawat musuh. Apakah hal ini merupakan eksperimen binomial ?

Penyelesaian :

Untuk memutuskan apakah hal tersebut merupakan eksperimen binomial perlu diuji apakah setiap sifat dari eksperimen binomial dipenuhi. Jika Y = banyak unit radar yang tidak mendeteksi pesawat terbang maka kejadian "tidak mendeteksi " adalah hasil yang sukses (S).

1. Eksperimen mengandung 4 trial. Suatu trial menentukan apakah unit radar tertentu mendeteksi pesawat terbang musuh.
2. Setiap trial menghasilkan 2 hasil. S menyatakan bahwa pesawat terbang tidak dideteksi. Sedangkan F menyatakan bahwa pesawat musuh dideteksi.
3. Karena semua unit radar mendeteksi pesawat musuh dengan probabilitas yang sama maka $P(\mathrm{S}) = p = P(\text{tidak mendeteksi}) = 0{,}05$.
4. Trial-trial independen karena tiap unit radar beroperasi secara independen.
5. Variabel random Y adalah banyak sukses di dalam 4 trial.

Jadi eksperimen tersebut merupakan eksperimen binomial dengan $n = 4$, $p = 0{,}05$, dan $q = 0{,}95$.

III.5 Distribusi Probabilitas Poisson

Dalam praktek sehari-hari distribusi Poisson digunakan dalam penghitungan *Y* dari ”peristiwa-peristiwa yang jarang terjadi”, yaitu banyak kejadian suatu peristiwa dengan probabilitas *p* yang kecil dalam *n* trial independen (*n* besar) sehingga hanya diketahui harga *Y* rata-rata, yaitu $\mu = np$. Distribusi Poisson merupakan model yang baik untuk menentukan distribusi probabilitas dari banyak kecelakaan mobil, kecelakaan dalam industri, banyak partikel radio aktif yang meluruh dalam periode tertentu, dan banyak salah cetak/ketik yang dibuat dalam suatu lembar halaman.

Distribusi probabilitas Poisson dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$P(Y=y)=\frac{\mu^{y}e^{-\mu}}{y!}$$

untuk $y = 0, 1, 2, \ldots\ldots$..

Contoh III.8 :

Apabila probabilitas bahwa seorang individu akan mengalami reaksi yang buruk terhadap injeksi dari suatu serum adalah 0,001 maka tentukan probabilitas bahwa dari 2000 individu, tepat 3 individu akan mengalami reaksi buruk.

Penyelesaian :

Probabilitas bahwa seorang individu akan mengalami reaksi yang buruk terhadap injeksi dari suatu serum adalah 0,001 sehingga probabilitas bahwa dari 2000 individu akan tepat 3 individu yang mengalami reaksi buruk merupakan distribusi Poisson dengan $\lambda = np = 2000(0{,}001) = 2$ sehingga probabilitas tepat 3 individu yang mengalami reaksi buruk adalah

$$P(Y=3)=\frac{2^{3}e^{-2}}{3!}=\frac{8e^{-2}}{6}=0{,}1839.$$

III.6 Distribusi Probabilitas Hipergeometrik

Misalkan terdapat N benda yang terdiri atas k benda yang diberi nama ‘sukses’ sedangkan sisanya N-k akan diberi nama ‘gagal’. Akan ditentukan probabilitas memilih Y sukses dari sebanyak k yang tersedia dan n-k gagal dari sebanyak N-k yang tersedia apabila sampel acak ukuran n diambil dari N benda.

Definisi III.4

Banyaknya sukses Y dalam percobaan geometrik dinamakan variabel random hipergeometrik. Distribusi probabilitas peubah acak hipergeometrik Y yaitu banyaknya sukses sampel acak ukuran n yang diambil dari N benda yang mengandung k bernama sukses dan N-k bernama gagal adalah

$$P(Y = y) = \frac{\binom{k}{y}\binom{N-k}{n-y}}{\binom{N}{n}}$$

untuk y = 0, 1, 2, … , n.

Contoh III. 9

Suatu kotak berisi 40 suku cadang dikatakan dapat diterima bila mengandung paling banyak 3 yang cacat. Suatu kotak akan ditolak bila sampel acak ukuran 5 suku cadang yang terpilih mengandung satu yang cacat. Berapakah probabilitas mendapatkan tepat satu yang cacat dalam sampel bila kotak tersebut mengandung tiga suku cadang yang cacat ?

Penyelesaian :

Misalkan variabel random Y menyatakan banyaknya suku cadang cacat yang terambil. Dengan menggunakan distribusi hipergeometrik untuk n = 5, N = 40, k = 3 dan Y = 1, probabilitas mendapatkan tepat satu yang cacat adalah

$$P(Y=1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{37}{4}}{\binom{40}{5}} = 0{,}3011.$$

III.7 Distribusi Binomial Negatif dan Distribusi Geometrik

Bila usaha yang saling bebas dilakukan berulang kali menghasilkan sukses dengan probabilitas p sedangkan gagal dengan probabilitas $q = 1 - p$ maka distribusi probabilitas variabel random Y yaitu banyaknya usaha yang berakhir tepat pada sukses ke-k dinyatakan dengan

$$P(Y=y;k,p) = \binom{y-1}{k-1} p^k\, q^{y-k}$$

untuk $y = k, k + 1, k + 2, \ldots\ldots.$

Contoh III.10

Probabilitas bahwa seseorang yang melantunkan tiga uang logam sekaligus akan mendapatkan semuanya muka atau semuanya belakang untuk kedua kalinya pada lantunan kelima adalah

$$P(Y=5;2,1/4)=\binom{4}{1}(1/4)^2\,(3/4)^3 = 27/256.$$

Distribusi geometrik merupakan kejadian khusus dari distribusi binomial negatif yaitu bila diambil $k = 1$.

Bila usaha yang saling bebas dan dilakukan berulang kali menghasilkan sukses dengan peluang p dan gagal dengan peluang $q = 1 - p$ maka distribusi probabilitas peubah acak Y yaitu banyaknya usaha yang berakhir pada sukses yang pertama dinyatakan dengan

$$P(Y=y) = p\,q^{y-1}$$

untuk $y = 1, 2, 3, \ldots.$

Contoh III.11

Dalam suatu proses produksi diketahui bahwa rata-rata 1 diantara 100 butir hasil produksi adalah cacat. Probabilitas memeriksa 5 barang dan baru menemukan barang yang cacat pada pemeriksaan yang kelima ?

Penyelesaian :

Variabel random Y menyatakan banyaknya pemeriksaan yang harus dilakukan sampai mendapatkan barang cacat yang pertama. Probabilitas menemukan barang cacat yang pertama pada pemeriksaan kelima adalah

$$P(Y = 5) = (0{,}01)\,(0{,}99)^4 = 0{,}0096.$$

SOAL-SOAL & PENYELESAIAN

Soal 1

Variabel random diskrit X mempunyai fungsi probabilitas berbentuk

$$f(x) = c(8-x)$$

untuk $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ dan nol untuk x yang lain.

a. Tentukan c.
b. Tentukan fungsi distribusi $F(x)$.
c. Tentukan $P(X > 2)$.

Penyelesaian

a. Karena $f(x)$ fungsi probabilitas maka $\sum_{x=0}^{5} c(8-x) = 1$ sehingga

$$c\,[\,8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3\,] = 1$$
$$33\,c = 1.$$

Berarti $c = 1/33$.

b. Fungsi distribusi $F(x) = P(X \le x)$ sehingga

$$F(x) = 0 \quad \text{untuk } x < 0,$$
$$= \frac{8}{33} \quad \text{untuk } 0 \le x < 1,$$
$$= \frac{15}{33} \quad \text{untuk } 1 \le x < 2,$$
$$= \frac{21}{33} \quad \text{untuk } 1 \le x < 2,$$
$$= \frac{26}{33} \quad \text{untuk } 2 \le x < 3,$$
$$= \frac{30}{33} \quad \text{untuk } 4 \le x < 5,$$
$$= 1 \quad \text{untuk } x > 5.$$

c. $P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{21}{33} = \frac{12}{33}$.

Soal 2

Variabel random bernilai bilangan bulat tidak negatif X mempunyai fungsi distribusi berbentuk

$$F(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$$

untuk x = 0, 1, 2, ... dan $F(x) = 0$ untuk $x < 0$.

a. Tentukan fungsi probabilitas dari X.
b. $P(\ 10 < X \leq 20)$.
c. $P(\ X$ genap).

Penyelesaian

a. Karena $F(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ untuk x = 0, 1, 2, ... maka

$F(0) = ½$,

$$F(1) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$F(2) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8},$$

$$F(3) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

Hal itu berarti,

$$f(x) = F(x) - F(x-1) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$$

untuk x = 0, 1, 2, ...

b. $P(\ 10 < X \leq\ 20) = P(X \leq 20) - P(X \leq 10)$

$$= F(20) - F(10)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{21} - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{11} - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}.$$

c. $P(X \text{ genap}) = \sum_{x=0}^{\infty} f(2x) = \sum_{x=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+2}\right)$

$$= \left(\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right) + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{4}\right) + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Soal 3

Variabel random diskrit mempunyai fungsi probabilitas $f(x)$.

a. Jika $f(x) = k\ (1/2)^x$ untuk $x = 1, 2, 3$ dan $f(x) = 0$ untuk x yang lain maka tentukan k.
b. Adakah fungsi berbentuk

$$f(x) = k\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{x} - \frac{1}{2}\right]$$

untuk $x = 0, 1, 2$ merupakan fungsi probabilitas untuk suatu k ?

Penyelesaian

a. Supaya $f(x)$ merupakan fungsi probabilitas maka $\sum_x k\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$

sehingga $k\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 1$. Akibatnya $k = 8/7$.

b. Supaya $f(x)$ merupakan fungsi probabilitas maka

$$\sum_x k\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{x} - \frac{1}{2}\right) = 1$$

sehingga

$$k\left(\frac{1}{2} + 0 + \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = k\,0 = 1.$$

Akibatnya, tidak ada k yang memenuhi.

Soal 4

Suatu individu mempunyai probabilitas rata-rata dapat menyelesaikan suatu pekerjaan tertentu dalam waktu 1 menit sebesar 3/5. Misalkan bahwa pekerjaan tersebut dicoba diselesaikan oleh 10 individu, berapa probabilitasnya tepat 7 individu yang menyelesaikan pekerjaan tersebut dalam waktu 1 menit ?

Penyelesaian

Dalam hal ini, percobaan ini adalah percobaan binomial dengan $n = 10$, $k = 7$ dan $p = 3/5$ sehingga probabilitasnya tepat 7 individu yang menyelesaikan pekerjaan tersebut dalam waktu 1 menit adalah

$$P(X = 7) = \binom{10}{7} 0{,}6^7 \, (0{,}4)^{10-7} = 0{,}215.$$

Soal 5

Untuk distribusi Poisson dengan parameter μ, buktikan bahwa

a. $P(k+1) = \dfrac{\mu}{k+1} P(k).$

b. $P(k+2) = \dfrac{\mu^2}{(k+2)(k+1)} P(k).$

Penyelesaian

a. Karena $P(k) = \dfrac{e^{-\mu} \mu^k}{k!}$ maka

$$P(k+1) = \frac{e^{-\mu} \mu^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{\mu}{k+1} . \frac{e^{-\mu} \mu^k}{k!} = \frac{\mu}{k+1} P(k).$$

b. Karena $P(k) = \dfrac{e^{-\mu} \mu^k}{k!}$ maka

$$P(k+2) = \frac{e^{-\mu} \mu^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{\mu^2}{(k+2)(k+1)} . \frac{e^{-\mu} \mu^k}{k!} = \frac{\mu^2}{(k+2)(k+1)} P(k).$$

Soal 6

Tunjukkan bahwa tidak ada k sehingga

$$f(x) = k/x \quad \text{untuk } x = 1, 2, 3, \ldots..$$
$$= 0 \quad \text{untuk } x \text{ yang lain,}$$

merupakan fungsi probabilitas.

Penyelesaian

Andaikan $f(x)$ fungsi probabilitas maka

$$\sum_{x=1}^{\infty} f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{k}{x} = k \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x} = 1$$

dan karena $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x}$ merupakan deret divergen maka tidak ada k sehingga $\sum_{x=1}^{\infty} f(x) = 1$ dan hal itu berarti tidak ada k sehingga $f(x)$ merupakan fungsi probabilitas.

Soal 7

Misalkan fungsi probabilitas

$$f(x) = k \text{ untuk } x = 1, 2, 3, \ldots, N,$$
$$= 0 \text{ untuk } x \text{ yang lain.}$$

a. Tentukan k.
b. Tentukan fungsi distribusinya.

Penyelesaian

a. Karena $f(x)$ fungsi probabilitas maka

$$\sum_{x=1}^{N} f(x) = \sum_{x=1}^{N} k = k\,N = 1$$

sehingga $k = 1/N$.

b. Fungsi distribusinya adalah

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{i=1}^{[x]} \frac{1}{N} = \frac{[x]}{N}$$

dengan $[x]$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x.

Soal 8

Apabila 10 % dari bolam yang diproduksi oleh suatu mesin rusak maka tentukan probabilitas bahwa 4 bolam yang dipilih secara random akan rusak :

a. Satu bolam.

b. Tidak ada.
c. Kurang dari dua.

Penyelesaian

Probabilitas sebuah bolam akan rusak adalah sebesar p=0,1 sedangkan probabilitas sebuah bolam tidak rusak adalah

$$q = 1 - p = 1\text{-}0{,}1 = 0{,}9.$$

Misalkan X menyatakan banyaknya bolam yang rusak. Variabel random X akan mempunyai distribusi binomial dengan parameter n = 4 dan p = 0,1.

a. Probabilitas terdapat satu bolam yang rusak adalah

$$P(X=1)=\binom{4}{1}(0{,}1)^1(0{,}9)^{4-1}=0{,}2916.$$

b. Probabilitas tidak ada bolam yang rusak adalah

$$P(X=0)=\binom{4}{0}(0{,}1)^0(0{,}9)^{4-0}=0{,}6561.$$

c. Probabilitas kurang dari dua bolam rusak

$$\begin{aligned}P(X<2) &= P(X=0)+P(X=1)\\ &= \binom{4}{0}(0{,}1)^0(0{,}9)^{4-0}+\binom{4}{1}(0{,}1)^1(0{,}9)^3\\ &= 0{,}2916+0{,}6561\\ &= 0{,}9477.\end{aligned}$$

Soal 9

Jika 13 kartu dipilih sekaligus secara random dari setumpuk 52 kartu remi biasa maka tentukan

a. Probabilitas bahwa diperoleh 6 kartu bergambar.
b. Probabilitas bahwa tidak ada kartu bergambar yang diperoleh.

Penyelesaian

Karena terdapat 52 kartu dan diambil 13 kartu secara random maka probabilitas diperoleh 6 kartu bergambar adalah

$$\frac{\binom{12}{6}\binom{40}{7}}{\binom{52}{13}}=\frac{912(18.643.560)}{635.013.559.600}=0{,}0271.$$

Probabilitas tidak ada kartu bergambar yang diperoleh adalah

$$\frac{\binom{12}{0}\binom{40}{13}}{\binom{52}{13}} = \frac{1.203.322.880}{635.013.559.600} = 0,0189.$$

Soal 10

Dalam pengkonstruksian model matematika populasi, diasumsikan bahwa probabilitas bahwa suatu keluarga mempunyai n anak adalah

$$p_n = (0,3)\,(0,7)^n$$

untuk n = 0, 1, 2, ….

a. Berapa probabilitas bahwa suatu keluarga tidak mempunyai anak ?
b. Berapa probabilitasnya suatu keluarga mempunyai anak kurang dari 4 anak?

Penyelesaian

a. Probabilitas bahwa suatu keluarga tidak mempunyai anak adalah

$$P(X=0) = p_0 = (0,3)\,(0,7)^0 = 0,3.$$

b. Probabilitasnya suatu keluarga mempunyai anak kurang dari 4 anak adalah

$$P(X<4) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3).$$
$$= p_0 + p_1 + p_2 + p_3$$
$$= (0,3)\,(0,7)^0 + (0,3)(0,7)^1 + (0,3)\,(0,7)^2 + (0,3)\,(0,7)^3$$
$$= (0,3)(1+0,7+0,49+0,343)$$
$$= 0.7599.$$

LATIHAN

1. Sebuah mata uang yang baik dilambungkan 4 kali secara independen. Jika variabel random Y yang didefisikan dalam s, dengan $s \in S$ (sebuah mata uang logam mempunyai dua sisi, yang dinamakan muka (M) dan belakang (B)) maka tentukan :
   a. Himpunan harga - harga Y.
   b. Distribusi variabel random Y.
2. Untuk nilai c yang mana fungsi p yang didefinisikan

$$p(k) = c/[\, k\,(k + 1\,)\,] \qquad \text{untuk } k = 1, 2, \ldots,$$
$$= 0 \qquad \text{untuk } k \text{ yang lain}$$

   merupakan fungsi probabilitas ?
3. Variabel random Y mempunyai distribusi probabilitas diskrit.

y	10	11	12	13	14
$p(y)$	0,2	0,3	0,2	0,1	0,2

Karena nilai di bawah Y dapat diasumsikan kejadian saling asing maka kejadian $\{ Y \le 12 \}$ adalah gabungan dari kejadian saling asing

$$\{ Y = 10 \} \cup \{ Y = 11 \} \cup \{ Y = 12 \}.$$

   a. Tentukan $P(Y \le 12)$.
   b. Tentukan $P(Y \le 14)$.
   c. Tentukan $P(Y \le 11$ atau $Y > 12)$.
   d. $P(Y > 12)$.
   e. $P(Y = 13)$.
4. Untuk nilai c berapa fungsi yang didefinisikan sebagai

$$f(x) = cx^{\alpha}$$

   untuk $x = 0, 1, 2, \ldots$ dan $0 < \alpha < 1$.
5. Misalkan variabel random X mengambil nilai-nilai 0, 1, 2, ... dengan probabilitas

$$f(j) = P(X = j) = c/3^{j}$$

   untuk $j = 0, 1, 2, \ldots$
   a. Tentukan konstanta c.
   b. $P(X \ge 10)$.

c. Tentukan $P(X \in A)$ dengan

$$A = \{ j : j = 2k + 1, k = 0, 1, 2, ... \}.$$

d. Tentukan $P(X \in B)$ dengan

$$B = \{ j : j = 3k + 1, k = 0, 1, 2, ... \}.$$

6. Suatu variabel random Y mempunyai distribusi probabilitas berikut

y	0	1	2	3	4	5
$p(y)$	0,1	0,3	0,4	0,1	?	0,05

   a. Tentukan $p(4)$.
   b. Gambarkan histogram dan grafik dari Y distribusi probabilitas Y.

7. Suatu perusahaan mempunyai 5 pelamar untuk 2 posisi yaitu 3 laki-laki dan 2 perempuan. Misalkan 5 pelamar mempunyai kualifikasi yang sama dan tidak ada pilih kasih untuk memilih salah satu jenis kelamin. Jika Y merupakan banyak perempuan yang terpilih untuk mengisi posisi tersebut maka
   a. Tentukan $p(Y)$.
   b. Gambarkan histogram untuk distribusi probabilitas Y.
8. Suatu kotak elektronika mengandung 6 transistor yang 2 diantaranya rusak. Tiga dari kotak diseleksi secara random dan diteliti. Jika Y menyatakan banyak transistor rusak yang terambil dengan $Y = 0$, 1 atau 2. Tentukan probabilitas untuk Y. Nyatakan grafik garisnya.
9. Diketahui Y adalah variabel random yang mempunyai distribusi Poisson dengan mean $\mu = 2$. Tentukan
   a. $P(Y = 4)$.
   b. $P(Y < 4)$.
   c. $P(Y \geq 4)$.
   d. $P(Y \geq 4 \mid Y \geq 2)$.
10. Probabilitas seekor tikus yang sudah terinjeksi dengan serum tertentu akan terserang penyakit adalah 0,2. Dengan menggunakan pendekatan Poisson, tentukan probabilitas bahwa paling banyak 3 dari 30 tikus yang diinjeksi akan terserang penyakit tersebut.

11. Probabilitas bahwa pasien yang terkena penyakit kanker usus besar dapat sembuh adalah 0,8. Apabila diketahui bahwa ada 20 orang yang menderita penyakit kanker usus besar maka :
    a. Berapakah probabilitasnya bahwa tepat 14 orang akan sembuh?
    b. Berapakah probabilitasnya bahwa paling sedikit 10 orang akan sembuh?
    c. Berapakah probabilitasnya paling sedikit 14 orang tetapi tidak lebih dari 18 orang akan sembuh?
    d. Berapakah probabilitasnya lebih dari lima orang akan sembuh?
12. Misalkan Y berdistribusi geometrik dengan probabilitas sukses p.
    a. Tunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan bulat a berlaku
    $$P(Y > a) = q^a.$$
    b. Tunjukkan bahwa untuk bilangan positif a dan b berlaku
    $$P(Y > a + b \mid Y > a) = q^b = P(Y > b).$$
13. Jika X mempunyai distribusi Poisson dan $P(X = 0) = 0{,}2$ maka tentukan $P(X > 4)$.
14. Misalkan bahwa X mempunyai distribusi Poisson dengan mean 10. Tentukan $P(5 < X < 15)$ dan gunakan ketidaksamaan Chebychev untuk menentukan batas bawah dari $P(5 < X < 15)$.
15. Dalam 10 pertanyaan B-S, berapakah probabilitas bahwa semua jawaban benar bila hanya menebak jawabannya saja? Berapakah probabilitasnya minimal 8 jawaban benar bila hanya menebak jawabannya saja?
16. Misalkan X adalah variabel random berdistribusi Poisson dengan parameter λ. Jika $P(X = 1) = 0{,}1$ maka tentukan probabilitas bahwa $X > 5$.
17. Misalkan X adalah variabel random berdistribusi Poisson dengan parameter λ. Jika $P(X = 1) = P(X = 2)$ maka tentukan $P(X < 10)$. Jika $P(X = 1) = 0{,}1$ dan $P(X = 2) = 0{,}2$ maka hitung probabilitas bahwa $X = 0$.
18. Untuk distribusi Poisson dengan parameter μ, buktikan bahwa jika μ adalah bilangan bulat positif maka $P(k)$ maksimum ketika $k = \mu$.
19. Dari 20 pelamar ke suatu universitas, 5 di antaranya berasal dari Indonesia Timur. Jika 10 pelamar dipilih secara random maka tentukan probabilitas bahwa

a. 3 orang akan berasal dari Indonesia Timur.

b. tidak lebih dari 2 berasal dari Indonesia Timur.

20. Sebuah keluarga berkeinginan untuk memiliki 2 anak laki-laki. Keluarga tersebut akan selalu berusaha untuk mendapatkan 2 anak laki-laki dan berhenti berusaha jika telah diperoleh 2 anak laki-laki. Jika X menyatakan banyak anak yang diperoleh sampai didapat 2 anak laki-laki dan probabilitas untuk memperoleh anak laki-laki dan perempuan sama maka

    a. berapakah probabilitasnya mempunyai tepat 2 anak.

    b. berapa probabilitasnya mempunyai anak kurang dari empat.

*****

Misalkan suatu eksperimen dilakukan dengan mencatat variabel random Y yang menunjukkan berat seorang mahasiswa (dalam kilogram) yang dipilih dari populasi mahasiswa UKSW. Pada prinsipnya harga Y dapat sebarang bilangan positif, seperti 52,37 kg berarti $Y > 0$. (Secara praktis harga Y akan berkisar antara 25 kg sampai 200 kg). Jika berat mahasiswa tersebut dapat diukur dengan ketepatan yang sempurna maka hal ini berarti Y akan mengambil harga pada suatu interval (yaitu $y \in (25,200)$).

Variabel random kontinu adalah variabel random yang mengambil harga pada sebarang harga dalam suatu interval.

Contoh IV.1

Panjang hidup t bola lampu merek ”XIYI” merupakan variabel random kontinu dengan $t > 0$.

Definisi IV.1

Fungsi $f(y)$ disebut fungsi kepadatan probabilitas variabel random kontinu Y, yang didefinisikan atas himpunan semua bilangan real **R** bila

1. $f(y) \geq 0$ untuk semua $y \in$ R,
2. $\int f(y)\ dy = 1$,
3. $P(a < Y < b) = \int_a^b f(y)\,dy$.

Jika variable random Y kontinu maka untuk sebarang y berlaku $P(Y = y) = 0$, sehingga $P(\ a < Y \leq b\ ) = P(\ a < Y < b\ )$.

Contoh IV.2

Misalkan variabel random Y mempunyai fungsi kepadatan probabilitas

$$f(y) = y^2/3 \quad \text{untuk } -1 < y < 2,$$
$$= 0 \quad \text{untuk } y \text{ yang lain.}$$

a. Buktikan bahwa $f(y)$ merupakan fungsi kepadatan probabilitas.

b. Hitunglah $P(0 < Y \leq 1)$.

Penyelesaian :

a. Karena $f(y) = y^2/3$ untuk $-1 < y < 2$ dan $f(y) = 0$ untuk y yang lain maka $f(y) \geq 0$ untuk setiap $y \in \mathbf{R}$.

Di samping itu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy = \int_{-1}^{2} \frac{y^2}{3}\,dy = \left.\frac{y^3}{9}\right|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{9} - \frac{(-1)^3}{9} = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1.$$

Hal itu berarti bahwa $f(y)$ merupakan fungsi kepadatan probabilitas.

b. $P(0 < Y \leq 1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{y^2}{3}\,dy = \left.\frac{y^3}{9}\right|_0^1 = \frac{1^3}{9} - \frac{0^3}{9} = \frac{1}{9}$.

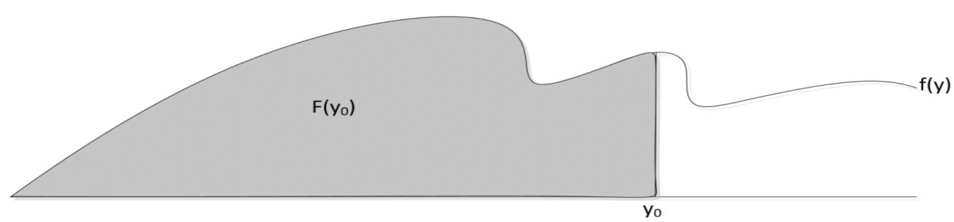
Definisi IV.2

Distribusi kumulatif $F(y)$ suatu variabel random kontinu Y dengan fungsi kepadatan $f(y)$ diberikan oleh

$$F(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)\,dt$$

dengan $f(t)$ adalah fungsi kepadatan probabilitas dan t adalah variabel integrasi.

Secara grafik dapat dinyatakan hubungan antara fungsi kepadatan probabilitas dan fungsi distribusi kumulatif.



Gambar IV.1 Hubungan antara fungsi kepadatan probabilitas dan fungsi distribusi kumulatif.

Fungsi distribusi variabel random kontinu harus merupakan fungsi kontinu, tetapi fungsi kepadatan probabilitas tidak perlu kontinu pada setiap titik.

Contoh IV.3 :

Diketahui variabel random Y kontinu dengan fungsi kepadatan probabilitas

$$f(y) = 3y^2 \qquad 0 \le y \le 1,$$
$$= 0 \qquad \text{yang lain.}$$

Tentukan $F(y)$ dan gambar grafik $f(y)$ dan $F(y)$.

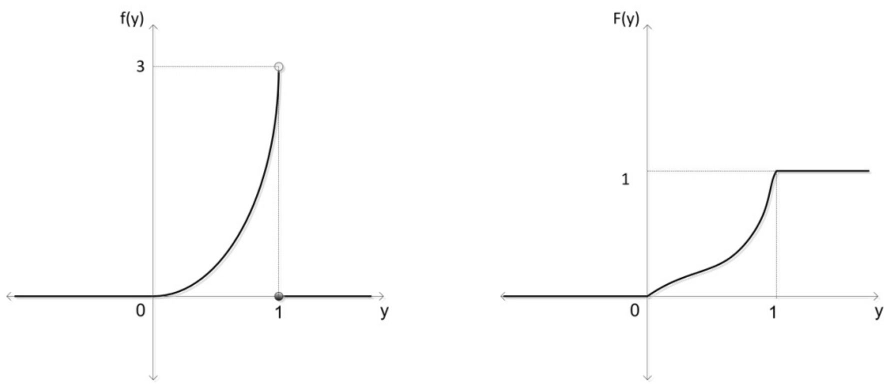
Penyelesaian

$$F(y) = \int_0^y 3t^2 \, dt = \left[t^3\right]_0^y = y^3 \quad \text{untuk } 0 < y < 1.$$

Hal itu berarti

$$F(y) = 0 \quad \text{untuk } y < 0,$$
$$= y^3 \quad \text{untuk } 0 < y < 1,$$
$$= 1 \quad \text{untuk } y > 1.$$

Grafik $f(y)$ dan $F(y)$ dinyatakan pada Gambar IV.2.



Gambar IV.2 Grafik Fungsi Kepadatan Probabilitas dan Fungsi Distribusi.

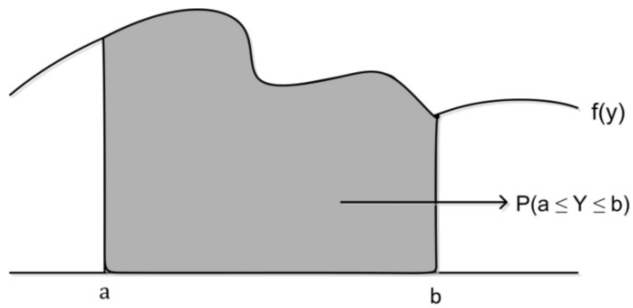
Fungsi $F(y_0)$ menyatakan probabilitas bahwa $Y \le y_0$. Untuk menentukan probabilitas bahwa Y berada pada interval tertentu, misalnya $a \le y \le b$ digunakan rumus

$$P(\ a \le Y \le b) = \int_a^b f(y)\,dy$$

dengan *f(y)* adalah fungsi kepadatan probabilitas untuk *Y*. Hal itu berakibat bahwa

$$P(\ a \le Y \le b) = F(b) - F(a).$$

Probabilitas ini ditunjukkan dengan luas daerah arsiran pada Gambar IV.3.



Gambar IV.3 Hubungan antara fungsi kepadatan probabilitas dan $P(\ a \le Y \le b)$.

Contoh IV.4:

Tentukan probabilitas bahwa $1 \le Y \le 2$ untuk

$$f(y) = (3/8)y^2 \qquad \text{untuk } 0 \le y \le 2,$$
$$= 0 \qquad \text{untuk } y \text{ yang lain.}$$

Penyelesaian

$$P(1 \le Y \le 2) = \int_1^2 f(y)\,dy$$

$$= \int_1^2 \frac{3}{8} y^2\,dy$$

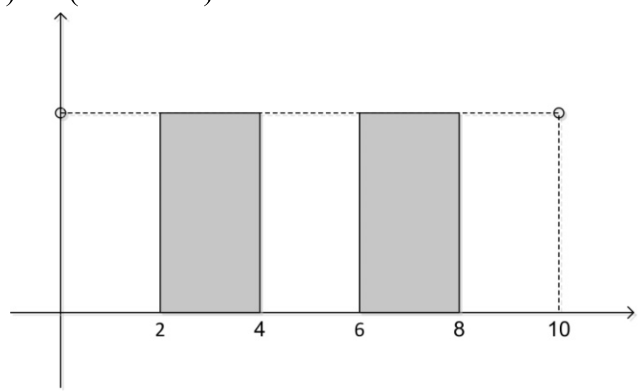
$$= \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{2}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{8}\right)\left[\frac{8-1}{3}\right]$$

$$= 7/8.$$

IV.2 Distribusi Seragam Kontinu

Misalkan bahwa sebuah bis selalu datang pada suatu halte antara pukul 08.00 dan 08.10 dan bis tersebut datang di halte tersebut pada sebarang interval bagian waktu tersebut sebanding dengan panjang interval bagian tersebut. Hal itu berarti bahwa bis akan mempunyai probabilitas yang sama untuk mendatangi halte antara 08.02 dan 08.04 dibandingkan dengan 08.06 dan 08.08. Model yang beralasan untuk mengambarkan hal di atas dinyatakan pada Gambar IV.4 karena $P(2 \le Y \le 4) = P(6 \le Y \le 8)$.



Gambar IV.4 Fungsi Kepadatan Probabilitas Seragam

Definisi IV.2

Variabel random Y yang mempunyai distribusi seragam kontinu akan mempunyai fungsi kepadatan probabilitas

$$f(y) = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \quad \text{untuk } \theta_1 \le y \le \theta_2,$$
$$= 0 \quad \text{untuk } y \text{ yang lain.}$$

Konstanta yang menentukan bentuk khusus dari suatu fungsi kepadatan probabilitas dinamakan *parameter* dari fungsi kepadatan probabilitas. Kuantitas θ_1 dan θ_2 adalah parameter dari fungsi kepadatan probabilitas seragam.

Contoh IV.5

Kedatangan pelanggan pada suatu loket layanan bank mengikuti distribusi Poisson. Diketahui bahwa selama periode waktu 30 menit yang diberikan satu pelanggan datang pada loket. Tentukan probabilitas bahwa pelanggan akan datang 5 menit terakhir dari periode 30 menit tersebut.

Penyelesaian

Sebagaimana disebutkan di atas, waktu aktual kedatangan mengikuti distribusi seragam pada (0,30). Jika Y menyatakan waktu kedatangannya maka

$$P(\,25 \le Y \le 30) = \int_{25}^{30} \frac{1}{30}\,dy \;=\; \frac{30-25}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}\,.$$

Hal itu berarti bahwa probabilitas bahwa kedatangan akan terjadi dalam sebarang interval 5 menit akan mempunyai nilai 1/6.

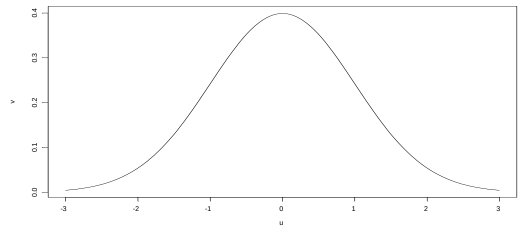
IV.3 Distribusi Normal

Dalam pasal ini akan dibahas tentang distribusi normal yang sangat penting dalam statistika teori maupun terapan. Distribusi ini banyak ditemui dalam pengukuran-pengukuran yang diperoleh dalam percobaan di laboratorium sains maupun pengukuran di bidang ilmu sosial. Pengukuran-pengukuran tersebut seringkali mempunyai distribusi yang berbentuk lonceng (*bell-shaped distribution*) sehingga dikatakan distribusi yang normal ditemui dan dikenal dengan nama distribusi normal. Nama lain dari distribusi normal adalah distribusi Gauss.

Variabel random kontinu Y dinyatakan berdistribusi normal dengan mean μ dan variasi σ^2 jika Y mempunyai fungsi kepadatan probabilitas berbentuk

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

dengan $-\infty < y < \infty$. Fungsi kepadatan probabilitas normal mempunyai grafik seperti pada Gambar IV.5



Gambar IV.5 Grafik Distribusi Normal Baku N(0,1).

Sifat Distribusi Normal :

(a) Karena $f(y)$ merupakan fungsi kepadatan probabilitas maka jelas bahwa $f(y) \geq 0$ untuk $-\infty < y < \infty$.

(b) Sebagaimana tampak dalam grafik fungsi kepadatan probabilitas normal, grafik $f(y)$ simetrik terhadap $y = \mu$ dan mempunyai titik belok $y = \mu \pm \sigma$.

(c) Jika Z mempunyai distribusi $\boldsymbol{N}(0,1)$ maka Z dikatakan berdistribusi normal baku (*standard normal*), sehingga fungsi kepadatan probabilitas Z dinyatakan sebagai berikut :

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} .$$

Jika Y mempunyai distribusi $\boldsymbol{N}(\mu,\sigma^2)$ dan $X = aY + b$ maka X mempunyai distribusi $\boldsymbol{N}(a\,\mu + b,\ a^2\,\sigma^2)$.

(d) Jika Y mempunyai distribusi $N(\mu,\ \sigma^2)$ dan $Z = \dfrac{Y-\mu}{\sigma}$ maka Z mempunyai distribusi $\boldsymbol{N}(0,1)$.

Contoh IV.6

Misalkan variabel random Z mempunyai distribusi normal dengan parameter mean $\mu = 0$ dan simpangan baku 1.

(a) $P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2)$
$= 1 - 0{,}9772$
$= 0{,}0228.$

(b) $P(-2 \leq Z \leq 2) = 1 - P(Z < -2) - P(Z > 2)$

$= 1 - 0{,}0228 - 0{,}0228$
$= 0{,}9544.$

(c) $P(0 \le Z \le 1{,}73) = 0{,}5 - P(Z > 1{,}73)$
$= 0{,}5 - 0{,}0418$
$= 0{,}4582.$

Contoh IV.7

Nilai ujian masuk UKSW untuk FSM berdistribusi Normal Baku dengan $\mu = 75$ dan $\sigma = 10$. Berapakah probabilitasnya seseorang mempunyai nilai antara 80 dan 90 ?

Penyelesaian :

Misalkan z menyatakan jarak dari mean distribusi normal yang dinyatakan dalam satuan simpangan baku.

Berarti $z = \dfrac{y-\mu}{\sigma}$ sehingga bagian dari populasi yang terletak antara

$$z_1 = \frac{80-75}{10} = 0{,}5 \quad \text{dan} \quad z_2 = \frac{90-75}{10} = 1{,}5$$

mempunyai luas

$$\begin{aligned} P(80 \le Y \le 90) &= P(0{,}5 \le Z \le 1{,}5) \\ &= P(Z \le 1{,}5) - P(Z < 0{,}5) \\ &= 0{,}3085 - 0{,}0668 \\ &= 0{,}2417. \end{aligned}$$

Hal itu berarti terdapat 0,2417 bagian dari populasinya yang mempunyai nilai tes masuk antara 80 dan 90.

IV.4 Distribusi Gamma, Eksponensial dan Chi – kuadrat.

Sebelum dibahas tentang distribusi Gamma, terlebih dahulu dibahas tentang fungsi Gamma. Fungsi Gamma didefinisikan sebagai

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx .$$

Sifat yang dimiliki dari fungsi Gamma adalah $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\,\Gamma(\alpha\text{-}1)$. Dengan rumus rekursi diperoleh sifat

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\,(\alpha - 2)\,(\alpha - 3)\,\Gamma(\alpha\text{-}3).$$

Dapat dibuktikan bahwa $\Gamma(1) = 1$ dan $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Untuk $\alpha = n$ dengan n bilangan bulat diperoleh $\Gamma(n) = (n-1)!$

Definisi IV.3

Variabel random kontinu Y berdistribusi Gamma dengan parameter α dan β bila fungsi kepadatan probabilitas Y dinyatakan dengan

$$f(y) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)}\, y^{\alpha-1}\, e^{-y/\beta} \qquad \text{untuk } y > 0,$$
$$= 0 \qquad \text{untuk } y \text{ yang lain.}$$

untuk $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$.

Contoh IV.8

Di suatu kota pemakaian air sehari (dalam jutaan liter) dapat dianggap berdistribusi Gamma dengan $\alpha = 2$ dan $\beta = 3$ yaitu

$$f(y) = \frac{1}{3^2\,\Gamma(2)}\, y^{2-1}\, e^{-y/3} \qquad \text{untuk } y > 0,$$
$$= 0 \qquad \text{untuk } y \text{ yang lain,}$$

atau

$$f(y) = \frac{1}{9}\, y^{2-1}\, e^{-y/3} \qquad \text{untuk } y > 0,$$
$$= 0 \qquad \text{untuk } y \text{ yang lain.}$$

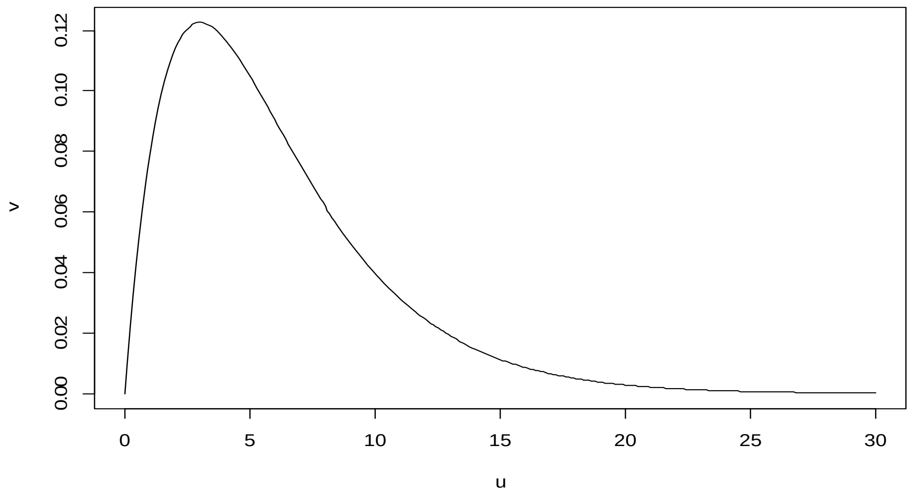
Apabila kemampuan menyediakan air adalah 9 juta liter per hari maka probabilitas bahwa pada suatu hari tertentu persediaan air tidak mencukupi adalah

$$\begin{aligned}
P(\ Y > 9\ ) &= \int_9^{\infty} \frac{1}{9}\, y^{2-1}\, e^{-y/3}\, dy \\
&= \int_3^{\infty} \frac{1}{9}(3u)^{2-1}\, e^{-u}\, 3\, du \\
&= \int_3^{\infty} u\ e^{-u}\ du \\
&= -u\, e^{-u} - e^{-u}\Big|_3^{\infty} \\
&= -\lim_{u \to \infty} \left[\ \frac{u}{e^u} - \frac{1}{e^u} + 3e^{-3} + e^{-3}\ \right]
\end{aligned}$$

$= 4\ e^{-3}$

$= 0{,}1991.$

Grafik distribusi Gamma dengan parameter $\alpha = 2$ dan $\beta = 3$ dinyatakan dalam Gambar IV.1



Gambar IV.1 Distribusi Gamma dengan parameter $\alpha = 2$ dan $\beta = 3$.

Definisi IV.4

Variabel random Y yang berdistribusi Gamma dengan parameter $\alpha = \nu/2$ dan $\beta = 2$ dinamakan variabel random chi-kuadrat dengan derajat bebas ν atau dinotasikan dengan χ^2_ν.

Definisi IV.5

Variabel random kontinu Y berdistribusi eksponensial dengan parameter β bila fungsi kepadatan probabilitasnya dinyatakan sebagai

$$f(y) = \frac{1}{\beta} e^{-y/\beta} \quad \text{untuk } y > 0,$$
$$= 0 \quad \text{untuk } y \text{ yang lain.}$$

Contoh IV.9

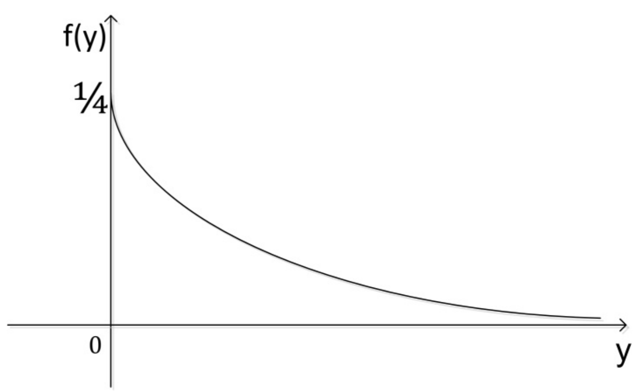
Lamanya waktu untuk melayani seseorang di suatu kafetaria merupakan suatu variabel random berdistribusi eksponensial dengan $\beta = 4$. Hal itu berarti fungsi kepadatan probabilitasnya adalah

$$f(y) = \frac{1}{4}e^{-y/4} \quad \text{untuk } y > 0,$$
$$= 0 \qquad \text{untuk } y \text{ yang lain.}$$

Probabilitas seseorang akan dilayani dalam kurun waktu kurang dari 3 menit adalah

$$P(\,Y < 3\,) = \int_0^3 \frac{1}{4}e^{-y/4}\,dy$$
$$= \int_0^{3/4} \frac{1}{4}e^{-u}\,4\,du$$
$$= \int_0^{3/4} e^{-u}\,du$$
$$= -e^{-u}\Big|_0^{3/4}$$
$$= 1 - e^{-0,75}$$
$$= 0,5276.$$

Grafik distribusi Eksponensial dengan parameter β = 4 dinyatakan pada Gambar IV.2.



Gambar IV.2 Grafik Fungsi Distribusi Eksponensial dengan mean 4.

IV.3 Distribusi Probabilitas Beta

Distribusi probabilitas Beta mempunyai dua parameter yaitu α dan β yang didefinisikan pada interval [0,1]. Fungsi kepadatan probabilitas Beta didefinisikan sebagai

$$f(y) = \frac{y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} \quad \text{untuk } 0 \le y \le 1,$$

$$= \quad 0 \qquad \text{untuk } y \text{ yang lain}$$

dengan $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\,dy = \dfrac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Contoh IV.5

Distributor bensin mempunyai tangki persediaan yang diisi di setiap Senin. Dalam pengamatan, kita tertarik untuk menyelidiki proporsi dari penjualan bensin dalam seminggu. Setelah penelitian beberapa minggu maka dapat dibuat model yang merupakan distribusi beta dengan α = 4 dan β = 2. Tentukan probabilitas bahwa distributor akan menjual paling sedikit 90% dari persediaannya dalam minggu yang diberikan.

Penyelesaian

Jika Y menyatakan proporsi dari penjualan selama minggu tersebut maka

$$f(y) = \frac{\Gamma(4+2)}{\Gamma(4)\,\Gamma(2)}\,y^3(1-y) \quad \text{untuk } 0 \le y \le 1,$$

$$= \quad 0 \qquad \text{untuk } y \text{ yang lain.}$$

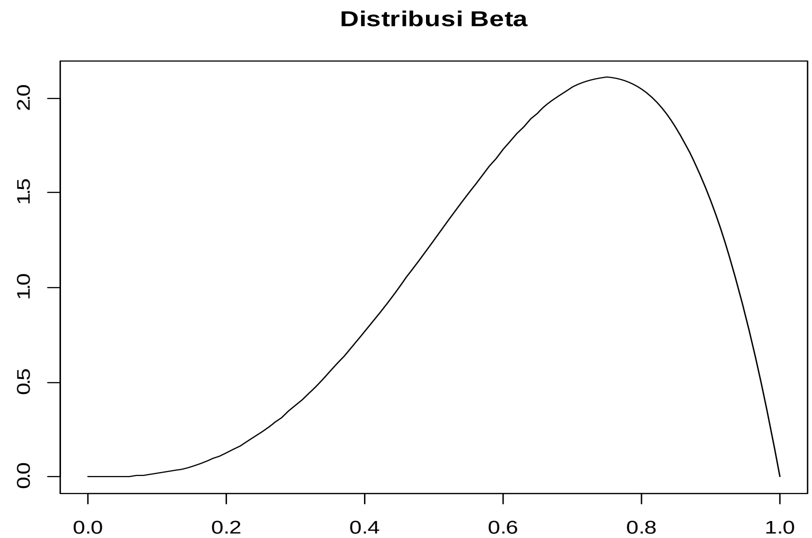
Berarti $P(\ Y > 0{,}9\ ) = \int_{0,9}^{1} f(y)\,dy = \int_{0,9}^{1} 20(y^3 - y^4)\,dy$

$$= 20\ \left.\frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5}\right|_{0,9}^{1}$$

$$= 20\ (0{,}004)$$

$$= 0{,}08.$$

Hal itu berarti probabilitasnya sangat kecil bahwa 90 % dari persediaan akan terjual. Grafik fungsi kepadatan probabilitas dari distribusi beta dengan α = 4 dan β = 2 dinyatakan pada Gambar IV.3.



Gambar IV.3. Distribusi beta dengan $\alpha = 4$ dan $\beta = 2$.

SOAL-SOAL & PENYELESAIAN

Soal 1

Variabel random mempunyai fungsi kepadatan probabilitas

$$f(x) = c\,(1-x)x^2 \quad \text{untuk } 0 < x < 1,$$
$$= 0 \quad \text{untuk } x \text{ yang lain.}$$

Tentukan c.

Penyelesaian

Supaya $f(x)$ merupakan fungsi kepadatan probabilitas maka

$$\int_0^1 c\,(1-x)\,x^2\,dx = 1$$

$$c\int_0^1 x^2 - x^3\,dx = 1$$

$$c\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\bigg|_0^1\right) = 1$$

$$c\left(\frac{1}{12}\right) = 1.$$

Diperoleh $c = 12$.

Soal 2

Tentukan fungsi kepadatan probabilitas yang bersesuaian dengan fungsi distribusi

a. $F(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{16}$ untuk $-1 \le x \le 3$.

b. $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} - \lambda x\, e^{-\lambda x}$ untuk $0 \le x < \infty$, $\lambda > 0$.

Penyelesaian

a. Secara lengkap fungsi distribusinya dapat dinyatakan sebagai

$$F(x) = 0 \quad \text{untuk } x < -1.$$
$$= \frac{x^2 + 2x + 1}{16} \quad \text{untuk } -1 \le x \le 3.$$
$$= 1 \quad \text{untuk } x > 3.$$

sehingga fungsi kepadatan probabilitasnya adalah

$$f(x) = F'(x) = \frac{2x+2}{16} = \frac{x+1}{8}$$

untuk $-1 \leq x \leq 3$ dan $f(x) = 0$ untuk x yang lain.

b. Secara lengkap fungsi distribusinya dapat dinyatakan sebagai

$$F(x) = 0 \quad \text{untuk } x < 0,$$
$$= 1 - e^{-\lambda x} - \lambda x\, e^{-\lambda x} \quad \text{untuk } 0 \leq x < \infty,$$

sehingga fungsi kepadatan probabilitasnya adalah

$$f(x) = F'(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} + \lambda^2\, x\, e^{-\lambda x} - \lambda e^{-\lambda x} = \lambda^2\, x\, e^{-\lambda x}$$

untuk $0 \leq x < \infty$, $\lambda > 0$ dan $f(x) = 0$ untuk x yang lain.

Soal 3

Jika X berdistribusi Gamma(1,2) maka tentukan modus dari X.

Penyelesaian

Karena X berdistribusi Gamma(1,2) maka mempunyai fungsi kepadatan probabilitas

$$f(x;1,2) = \frac{1}{1^2\,\Gamma(2)}\, x^{2-1}\, e^{-x/1} = xe^{-x}$$

untuk $x > 0$ sehingga $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)\,e^{-x} = 0$ atau $x = 1$. Jadi modusnya adalah $x = 1$.

Soal 4

Suatu variabel random Y yang dapat memperoleh harga antara $y = 2$ dan $y = 5$ mempunyai fungsi kepadatan probabilitas

$$f(y) = 2(1+y)/27.$$

a. Hitunglah $P(Y < 4)$.

b. Hitung $P(3 < Y < 4)$.

Penyelesaian

Karena fungsi kepadatan probabilitas dari variable random Y adalah

$$P(Y<4) = \int_2^4 \frac{2+2y}{27}\, dy = \left.\frac{2y+y^2}{27}\right|_2^4 = \frac{8+16-(4+4)}{27} = \frac{16}{27}.$$

Di samping itu,

$$P(3<Y<4)=\int_3^4 \frac{2+2y}{27}\,dy=\left.\frac{2y+y^2}{27}\right|_3^4=\frac{8+16-(6+9)}{27}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}.$$

Soal 5

Perubahan kedalaman suatu sungai dari hari ke hari yang diukur dalam desimeter pada suatu tempat tertentu mengikuti fungsi kepadatan probabilitas

$f(x) = k$ untuk $-2 \le y \le 2$,

$= 0$ untuk y yang lain.

a. Tentukan nilai k.
b. Tentukan fungsi distribusi dari Y.

Penyelesaian

a. Karena $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy = 1$ maka $\int_{-2}^{2} k\,dy = 4k = 1$ sehingga $k = ¼$.

b. Fungsi distribusi dari Y untuk $-2 \le y \le 2$ adalah

$$F(y) = P(Y \le y) = \int_{-2}^{y} \frac{1}{4}\,dy = \frac{y+2}{4}$$

sehingga secara lengkap fungsi distribusi dari Y adalah

$F(y) = 0$ untuk $y < -2$,

$= \dfrac{y+2}{4}$ untuk $-2 \le y \le 2$,

$= 1$ untuk $y > 2$.

Soal 6

Prosentase kotoran tiap *batch* dalam suatu produk kimia tertentu merupakan suatu variabel random Y yang mempunyai fungsi kepadatan probabilitas

$f(y) = 12\,y^2\,(1-y)$ untuk $0 \le y \le 1$,

$= 0$ untuk y yang lain.

Suatu *batch* dengan lebih dari 40 % kotoran tidak dapat dijual. Berapakah probabilitas bahwa *batch* yang dipilih secara random tidak dapat dijual karena kelebihan kotoran ?

Penyelesaian

Karena variabel random *Y* yang mempunyai fungsi kepadatan probabilitas

$$f(y) = 12\, y^2\, (1-y) \quad \text{untuk } 0 \le y \le 1,$$
$$= 0 \quad \text{untuk } y \text{ yang lain.}$$

maka probabilitas bahwa *batch* yang dipilih secara random tidak dapat dijual karena kelebihan kotoran adalah sama dengan probabilitas kotoran yang diperoleh lebih dari 40 % yaitu

$$P(Y > 0{,}4) = \int_{0,4}^{1} 12\, y^2 (1-y)\, dy = \int_{0,4}^{1} 12 y^2 - 12 y^3\, dy$$
$$= 4y^3 - 3y^4 \Big|_{0,4}^{1}$$
$$= 4 - 3 - (4(0{,}4)^3 - 3(0{,}4)^4)$$
$$= 1 - 4(0{,}4)^3 + 3(0{,}4)^4$$
$$= 0{,}6672.$$

Soal 7

Biaya reparasi mingguan *Y* dari suatu mesin mempunyai fungsi kepadatan probabilitas yang diberikan oleh

$$f(y) = 3(1-y)^2 \quad \text{untuk } 0 < y < 1,$$
$$= 0 \quad \text{untuk } y \text{ yang lain,}$$

dengan ukuran dalam ratusan dolar. Berapa anggaran yang seharusnya disediakan untuk biaya reparasi sehingga biaya yang sebenarnya akan melampaui anggaran hanya 10 % darinya.

Penyelesaian

Misalkan *b* besarnya anggaran dan *Y* menyatakan biaya reparasi yang sebenarnya. Akan dicari *b* sehingga $P(Y > b) = 0{,}1$ yaitu

$$P(Y > b) = \int_{b}^{1} 3(1-y)^2\, dy$$
$$= \int_{b}^{1} 3 - 6y + 3y^2\, dy$$
$$= 3y - 3y^2 + y^3 \Big|_{b}^{1}$$
$$0{,}1 = 3 - 3 + 1 - 3b + 3b^2 - b^3.$$

Untuk mendapatkan b dapat juga diperoleh dengan distribusi Beta dengan parameter $\alpha = 1$ dan $\beta = 3$. Nilai *b* merupakan kuantil ke 90% dari distribusi Beta dengan parameter α = 1 dan β = 3 yaitu 0,5358. Hal itu berarti anggaran yang disediakan adalah 53,58 dolar.

Soal 8

Waktu hidup (dalam jam) X dari suatu komponen elektronik merupakan variabel random dengan fungsi kepadatan

$$f(x) = (1/100)\ \exp(-x/100) \quad \text{untuk } x > 0,$$
$$= 0 \quad \text{untuk } x \text{ yang lain.}$$

Jika tiga komponen bekerja saling bebas dalam sebuah peralatan. Peralatan gagal berfungsi jika paling sedikit dua komponen gagal berfungsi. Tentukan probabilitas bahwa peralatan dapat bekerja tanpa mengalami kegagalan paling sedikit 200 jam.

Penyelesaian

Probabilitas komponen bekerja dengan baik paling sedikit 200 jam adalah

$$\begin{aligned} P(X > 200) &= 1 - P(X \le 200) \\ &= 1 - \int_0^{200} \frac{1}{100} e^{-x/100}\, dx \\ &= 1 + e^{-x/100}\Big|_0^{200} \\ &= e^{-2} \\ &= 0{,}1353. \end{aligned}$$

Probabilitas peralatan yang terdiri dari 3 komponen bekerja dengan baik paling sedikit 200 jam adalah

$$\begin{aligned} = 1 - P(T \ge 2) &= 1 - 3(0{,}1353)(0{,}8647)^2 - (0{,}8647)^3 \\ &= 1 - 0{,}95 \\ &= 0{,}05. \end{aligned}$$

Soal 9

Suatu pabrik membuat suatu produk dengan bahan mentah tertentu. Banyak bahan mentah yang digunakan per hari mengikuti distribusi eksponensial dengan β = 4 (diukur dalam ton). Tentukan probabilitas bahwa pabrik tersebut akan menggunakan lebih dari 4 ton pada suatu hari yang diberikan.

Penyelesaian

Probabilitas bahwa pabrik tersebut akan menggunakan lebih dari 4 ton pada suatu hari yang diberikan adalah

$$P(X>4)=1-P(X\leq 4)=1-\int_0^4 \frac{1}{4}e^{-x/4}\,dx=e^{-1}=0{,}3679.$$

Soal 10

Proporsi waktu per hari bahwa semua kasir di supermarket tertentu sibuk (terpakai) merupakan variabel random Y dengan fungsi kepadatan probabilitas

$$f(y)=cy^2(1-y)^4$$

untuk $0 \leq y \leq 1$.

a. Tentukan c sehingga $f(y)$ merupakan fungsi kepadatan probabilitas.
b. Berapa probabilitasnya bahwa hanya separuh kasir yang terpakai/sibuk?

Penyelesaian

a. Nilai c sehingga $f(y)$ merupakan fungsi kepadatan probabilitas adalah

$$c=\frac{\Gamma(3+5)}{\Gamma(3)\Gamma(5)}=\frac{7!}{2!4!}=\frac{7(6)5}{2}=105.$$

b. Probabilitasnya bahwa hanya kurang dari separoh kasir yang terpakai/sibuk adalah

$$P(X<0{,}5)=\int_0^{0,5} 105\,y^2(1-y)^4\,dy=0{,}7735.$$

LATIHAN

1. Jika diketahui $f(x) = kx^2(1-x)$ untuk $0 < x < 1$ maka :
   a. Tentukan k sehingga $f(x)$ merupakan fungsi kepadatan probabilitas.
   b. Tentukan $P(X > 0,2)$.
2. Jika diketahui variabel random Y mempunyai distribusi N(3,4) maka tentukan c sehingga
$$P(Y > c) = 3\,P(Y \leq c).$$
3. Tentukan probabilitas variabel random yang berdistribusi normal baku z yang terletak antara – 1,66 dan 1,33.
4. Tentukan nilai z yaitu z_0 dalam distribusi normal baku sehingga hanya dilampaui oleh 10 %. Hal itu berarti, tentukan z_0 sehingga
$$P(z \geq z_0) = 0.10.$$
5. Misalkan variabel random X mempunyai distribusi probabilitas :
$$f(x) = k\,x^3 \exp(-x/2) \quad \text{untuk } x > 0,$$
$$= 0 \quad \text{untuk } x \text{ yang lain.}$$
   Tentukan k sehingga $f(x)$ merupakan fungsi probabilitas.
6. Jika variabel random Y mempunyai distribusi probabilitas eksponensial maka tunjukkan bahwa untuk $a > 0$ dan $b > 0$ berlaku
$$P(\,Y > a + b \mid Y > a\,) = P(\,Y > b\,).$$
7. Variabel random Y mempunyai fungsi kepadatan probabilitas dinyatakan dengan
$$f(y) = ky^3\,(1-y)^2 \quad \text{untuk } 0 \leq y \leq 1,$$
$$= 0 \quad \text{untuk } y \text{ yang lain.}$$
   Tentukan k sehingga $f(y)$ merupakan fungsi kepadatan probabilitas.
8. Variabel random Y mempunyai fungsi kepadatan probabilitas yang dinyatakan dengan
$$f(y) = 6\,y\,(1-y) \quad \text{untuk } 0 \leq y \leq 1,$$
$$= 0 \quad \text{untuk } y \text{ yang lain.}$$
   a. Tentukan $F(y)$.
   b. Tentukan gambar $f(y)$ dan $F(y)$.
   c. Hitung $P(\,0,5 \leq Y \leq 0,8\,)$.

9. Tentukan c sehingga $f(x) = c/(x^2 + 1)$ untuk $-\infty < x < \infty$ merupakan fungsi kepadatan probabilitas. Gunakan hasil tersebut untuk menentukan $P(1< X^2 < 3)$ dan fungsi distribusinya $F(x)$.
10. Jika variabel random mempunyai fungsi distribusi

$$F(x) = 1\text{-exp}(-3x)$$

untuk $x \geq 0$ dan 0 untuk $x < 0$.
   a. Tentukan fungsi kepadatan probabilitasnya.
   b. Tentukan $P(X > 3)$.
   c. Tentukan $P(-2 < X \leq 4)$.
11. Dapatkan fungsi $F(x) = k(1\text{-}x^2)$ untuk $0 \leq x \leq 1$ dan 0 untuk x yang lain menjadi fungsi distribusi?
12. Fungsi distribusi dari suatu variabel random ditentukan oleh

$$\begin{aligned} F(x) &= kx^2 \text{ untuk } 0 \leq x < 2, \\ &= 1 \quad \text{untuk } x \geq 2, \\ &= 0 \quad \text{untuk } x < 0. \end{aligned}$$

   a. Tentukan k.
   b. $P(X > 1)$.
   c. Tentukan $P(1 < X < 3/2)$.
13. Misalkan diketahui bahwa dalam distribusi Beta didefinisikan

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\, dx .$$

Tunjukkan bahwa $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$.
14. Misalkan X variabel random berdistribusi seragam pada $(-\alpha, \alpha)$.
   a. Tentukan α sehingga $P(-1 < X < 2) = 0{,}75$.
   b. Tentukan α sehingga $P(|X| < 1) = P(|X| > 2)$.
15. Variabel random X mempunyai fungsi kepadatan probabilitas yang dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} f(x) &= cx^2 \text{ untuk } 1 \leq x \leq 2, \\ &= cx \quad \text{untuk } 2 < x < 3, \\ &= 0 \quad \text{untuk } x \text{ yang lain.} \end{aligned}$$

   a. Tentukan konstanta c.
   b. $P(X > 2)$.
   c. $P(1/2 < X < 3/2)$.
16. Dapatkah fungsi berikut ini merupakan fungsi distribusi? Jelaskan.

$$F(x) = c(1-x^2) \quad \text{untuk } 0 \le x \le 1,$$
$$= 0 \quad \text{untuk } x \text{ yang lain.}$$

17. Pada ujian Pengantar Teori Probabilitas mempunyai mean $\mu = 60$ dan simpangan baku $\sigma = 10$.
    a. Tentukan nilai standard dari dua siswa yang mempunyai nilai 93 dan 52.
    b. Tentukan nilai dari dua siswa yang nilai standardnya berturut-turut -0,6 dan 1,2.
18. Tentukan b sehingga $P(Z > b) = 0{,}85$ dengan Z berdistribusi normal dengan mean $\mu = 0$ dan $\sigma = 1$.
19. Jika variabel random X berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas 8 maka tentukan $P(X < b) = 0{,}8$.
20. Suatu variabel random X mempunyai distribusi Gamma dengan $\alpha = 3$ dan $\beta = 2$. Tentukan (a) $P(X \le 1)$. (b) $P(1 \le X \le 2)$.

*****