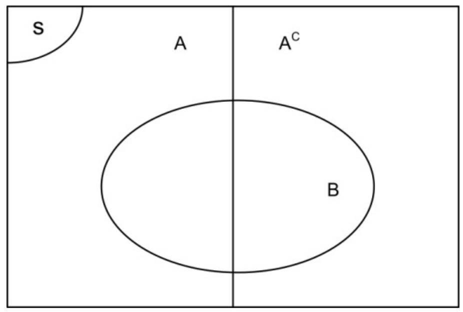
Teorema Bayes

Misalkan dimiliki dua kotak yaitu kotak I dan kotak II. Dalam kotak I terdapat 10 bola yang terdiri dari 3 bola merah dan 7 bola putih sedangkan pada kotak II terdapat 15 bola yang terdiri dari 5 bola merah dan 10 bola putih. Apabila bola-bola tersebut disatukan dalam ember dan satu bola diambil secara random tanpa melihat dan ternyata berwarna merah, akan ditentukan probabilitasnya bahwa bola tersebut semula berasal dari kotak I. Karena keseluruhan terdapat 25 bola yang terdiri dari 10 bola dari kotak I dan 15 bola dari kotak II. Dari 25 bola tersebut, 8 bola berwarna merah dan 17 bola berwarna putih.

Misalkan kejadian B adalah kejadian mendapatkan bola berwarna merah dan kejadian A adalah kejadian mendapatkan bola dari kotak I. Probabilitas bersyarat yang diinginkan adalah

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$



Gambar II.5 Hubungan antara Himpunan B, A dan A^c

Kejadian B dapat ditulis sebagai gabungan dari dua kejadian yang terpisah yaitu $B \cap A$ dan $B \cap A^c$ sehingga

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$$

dan berarti

$$P(B) = P(B \cap A) \cup P(B \cap A^c)$$

Akibatnya

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\frac{P(B \cap A)}{P(B \cap A) + P(B\cap A^c)}$$

dan diperoleh

$$P(B\cap A)=\frac{3}{25},$$

$$P(B\cap A^C)=\frac{5}{25},$$

sehingga

$$P(A|B)= \frac{P(B \cap A)}{P(B \cap A) + P(B\cap A^c)} =\frac{3/25}{(3/25)+(5/25)}=\frac{3}{8}.$$

Dalam bentuk teorema Bayes, hal tersebut dapat dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B\mid A)\,P(A) + P(B\mid A^c)\,P(A^c)} \\ &= \frac{(3/10)(10/25)}{(3/10)(10/25)+(5/15)(15/25)} \\ &= \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Teorema II.5

Misalkan { A, A^c } suatu himpunan kejadian yang merupakan suatu sekatan sederhana dari ruang sampel S dengan $P(A) \neq 0$.

Misalkan B adalah suatu kejadian sembarang dalam S dengan $P(A) \neq 0$ maka berlaku

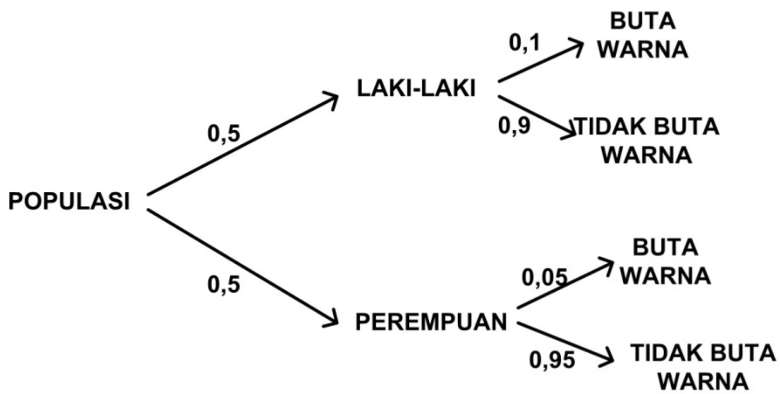
$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B\mid A)\,P(A) + P(B\mid A^c)\,P(A^c)}$$

Contoh II.9

Anggaplah bahwa dalam suatu populasi terdapat laki-laki dan perempuan dengan jumlah yang sama. Dalam populasi ini 10 % dari laki-laki dan 5 % dari wanita adalah buta warna. Seorang buta warna dipilih secara random berapa probabilitasnya orang laki-laki yang terpilih ?

Penyelesaian

Diagram pohon probabilitas yang bisa dibuat adalah



Gambar II.6 Diagram pohon probabilitas

Populasi terbagi ke dalam dua himpunan bagian yang saling asing yaitu laki-laki (kejadian **M**) dan perempuan (kejadian **F**). Akan dicari probabilitasnya orang laki-laki yang terpilih dengan syarat buta warna (**BW**). Dengan menggunakan teorema Bayes diperoleh

$$\begin{aligned} P(M|BW) &= \frac{P(BW \mid M)\,P(M)}{P(BW \mid M)\,P(M) + P(BW \mid F)\,P(F)} \\ &= \frac{(0{,}05)(0{,}5)}{(0{,}05)(0{,}5)+(0{,}0025)(0{,}5)} \\ &= \frac{2500}{2625}. \\ &= \frac{20}{21}. \end{aligned}$$

Secara umum, teorema Bayes dinyatakan dalam teorema berikut ini.

Teorema II.6

Misalkan $\{ A_1, A_2, \ldots, A_n \}$ suatu himpunan kejadian yang merupakan suatu sekatan ruang sampel S dengan $P(A_i) \neq 0$ untuk $i = 1,2, \ldots, n$.

Misalkan B suatu kejadian sembarang dalam S dengan $P(B) \neq 0$ maka untuk $k = 1,2, \ldots, n$ berlaku

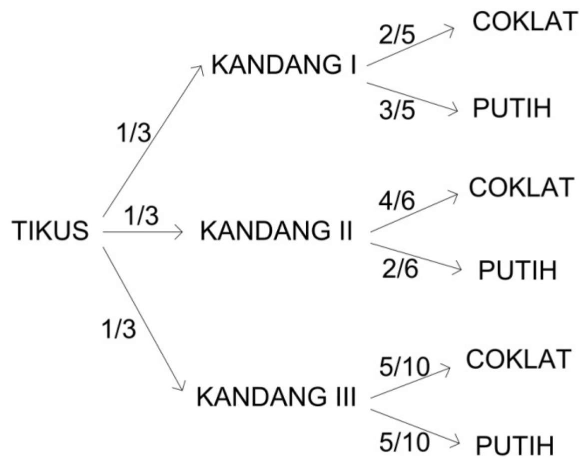
$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k \cap B)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)} = \frac{P(B|A_k)\,P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) P(A_i)}.$$

Contoh II.10

Di suatu laboratorium terdapat 3 kandang tikus. Kandang I terdapat dua tikus coklat dan 3 tikus putih, kandang II terdapat empat tikus coklat dan 2 tikus putih dan kandang III terdapat 5 tikus coklat dan 5 tikus putih. Sebuah kandang dipilih secara random dan seekor tikus dipilih secara random dari kandang tersebut. Jika tikus yang terpilih berwarna putih, berapa probabilitas bahwa tikus yang terpilih berasal dari kandang I ?

Penyelesaian

Diagram pohon probabilitas yang bisa dibuat adalah



Gambar II.7 Diagram Pohon Probabilitas Contoh II.10

$$P(I\,|W) = \frac{P(W\,|\,I)\,P(I)}{P(W\,|\,I)\,P(I) + P(W\,|\,II)\,P(II) + P(W\,|\,III)\,P(III)}$$

$$= \frac{(3/5)(1/3)}{(3/5)(1/3) + (2/6)(1/3) + (5/10)(1/3)}$$

$$= \frac{1/5}{43/90}$$

$$= \frac{18}{43}.$$

SOAL-SOAL & PENYELESAIAN

Soal 1

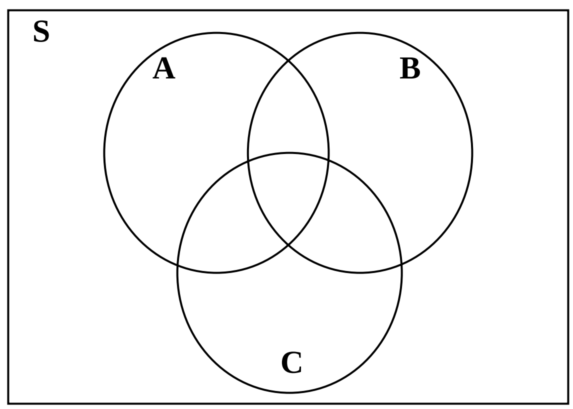
Apabila A menyatakan proyek ke-1 disetujui, B menyatakan proyek ke-2 disetujui dan C menyatakan proyek ke-3 disetujui.

Diketahui bahwa $P(A) = 0{,}22$, $P(B) = 0{,}25$, $P(C) = 0{,}28$, $P(A \cap B) = 0{,}11$, $P(A \cap C) = 0{,}05$, $P(B \cap C) = 0{,}07$ dan $P(A \cap B \cap C) = 0{,}01$. Nyatakan kejadian berikut ini dalam kata-kata dan hitunglah :

a. $A \cup B$
b. $A^c \cap B^c$
c. $A \cup B \cup C$
d. $A^c \cap B^c \cap C^c$

Penyelesaian

Berdasarkan informasi di atas maka dapat dibuat diagram Venn berikut probabilitas untuk masing-masing himpunan yang saling asing :



Gambar II.8 Diagram Venn $A \cup B \cup C$.

Akibatnya diperoleh :

a. $A \cup B$ menyatakan kejadian proyek ke-1 atau proyek ke-2 disetujui yaitu

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0{,}22 + 0{,}25 - 0{,}11 \\ &= 0{,}36. \end{aligned}$$

b. $A^c \cap B^c$ menyatakan kejadian proyek ke-1 tidak disetujui dan proyek ke-2 tidak disetujui yaitu

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - 0{,}36 = 0{,}64. \end{aligned}$$

c. $A \cup B \cup C$ menyatakan kejadian proyek ke-1 atau proyek ke-2 disetujui atau proyek ke-3 disetujui yaitu

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C) \\ &= 0{,}22 + 0{,}25 + 0{,}28 - 0{,}11 - 0{,}05 - 0{,}07 + 0{,}01 \\ &= 0{,}53. \end{aligned}$$

d. $A^c \cap B^c \cap C^c$ menyatakan kejadian proyek ke-1 tidak disetujui dan proyek ke-2 tidak disetujui dan proyek ke-3 tidak disetujui artinya ketiga proyek tidak disetujui yaitu

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c \cap C^c) &= P((A \cup B \cup C)^c) \\ &= 1 - P(A \cup B \cup C) \\ &= 1 - 0{,}53 \\ &= 0{,}47. \end{aligned}$$

Soal 2

Tunjukkan bahwa $P(A \cap B \mid C) = P(A \mid B \cap C)\, \mathrm{P}(B \mid C)$.

Penyelesaian

$$\begin{aligned} P(A | B \cap C)\ P(B|C) &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{P((A \cap B) \cap C)}{P(C)} \\ &= P(A \cap B | C). \end{aligned}$$

Soal 3

Buktikan bahwa jika $P(B \mid A) > P(B)$ maka $P(A \mid B) > P(A)$.

Penyelesaian

Karena $P(B \mid A) > P(B)$ maka

$$\frac{P(B \cap A)}{P(A)} > P(B)$$

sehingga $P(B \cap A) > P(B)\,P(A)$. Akibatnya

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} > \frac{P(B)\,P(A)}{P(B)} = P(A).$$

Soal 4

Jika diketahui kejadian A dan B maka buktikan bahwa

a. $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$.
b. $P(A \cup B) = 1 - P(A^c \cap B^c)$.

Penyelesaian :

a. Karena $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ dan $A \cap B$ saling asing dengan $A \cap B^c$ maka

$$P(A) = P(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap B^c)$$

sehingga

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B).$$

b. $P(A \cup B) = 1 - P(\,(A \cup B)^c\,)$
$\quad = 1 - P(\,A^c \cap B^c\,)$.

Soal 5

Misalkan diketahui $P(A) = P(B) = 1/3$ dan $P(A \cap B) = 1/10$.

Tentukan :

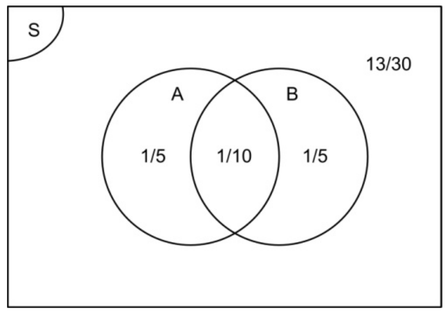
a. $P(B^c)$.
b. $P(A \cup B^c)$.
c. $P(B \cap A^c)$.
d. $P(A^c \cup B^c)$.

Penyelesaian :

Karena $P(A) = P(B) = 1/3$ dan $P(A \cap B) = 1/10$ maka

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= (1/3) + (1/3) - (1/10) \\ &= (10 + 10 - 3)/30 \\ &= 17/30 \end{aligned}$$

sehingga $P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 17/30 = 13/30$. Dengan mudah, hal tersebut dapat dinyatakan dalam diagram Venn pada Gambar II.9 berikut ini.



Gambar II.9 Diagram Venn

a. $P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - (1/3) = 2/3$.
b. $P(A \cup B^c) = P(A) + P((A \cup B)^c)$

$$= (1/3) + (13/30)$$
$$= 23/30.$$

   Dalam hal ini, artinya $A \cup B^c$ kejadian A digabung dengan B^c sehingga sama artinya dengan kejadian A digabung dengan kejadian $(A \cup B)^c$ dengan kejadian A dan $(A \cup B)^c$ adalah dua kejadian yang saling asing.
c. $P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$

   Dengan melihat diagram Venn, kejadian $B \cap A^c$ sama artinya dengan kejadian B tetapi tidak di kejadian $A \cap B$.
d. $P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c)$

$$= 1 - P(A \cap B)$$
$$= 1 - (1/10)$$
$$= 9/10.$$

Soal 6

Dalam populasi lalat buah yang dipelajari, terdapat 2 jenis mutasi yaitu mutasi sayap dan mutasi mata. Mutasi sayap terdapat 25 % populasi, 15 % mutasi mata dan 10 % mutasi keduanya. Jika seekor lalat dipilih secara random maka tentukan :

a. Jika lalat tersebut mempunyai mutasi sayap, berapakah probabilitasnya juga mempunyai mutasi mata?
b. Jika lalat tersebut mempunyai mutasi mata, berapakah probabilitasnya juga mempunyai mutasi sayap?
c. Berapakah probabilitasnya bahwa lalat tersebut paling sedikit mempunyai satu mutasi ?

Penyelesaian :

Misalkan W menyatakan bahwa lalat mengalami mutasi sayap dan E menyatakan bahwa lalat mengalami mutasi mata.

a. $P(E \mid W) = \dfrac{P(E \cap W)}{P(W)} = \dfrac{0{,}10}{0{,}25} = \dfrac{2}{5}.$

b. $P(W \mid E) = \dfrac{P(W \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0{,}10}{0{,}15} = \dfrac{2}{3}.$

c. $P(W \cup E) = P(W) + P(E) - P(W \cap E)$

$= 0{,}25 + 0{,}15 - 0{,}10$

$= 0{,}30.$

Soal 7

Misalkan bahwa kejadian A dan B adalah kejadian-kejadian sehingga $P(A) = 0{,}8$ dan P(B) = 0,7.

(a) Apakah mungkin bahwa $P(A \cap B) = 0{,}1$? Beri alasan.
(b) Berapakah nilai terkecil untuk $P(A \cap B)$?
(c) Apakah mungkin bahwa $P(A \cap B) = 0{,}777$? Beri alasan.
(d) Berapakah nilai terbesar untuk $P(A \cap B)$?

Penyelesaian :

a) Karena

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0{,}8 + 0{,}7 - P(A \cap B)$

$= 1{,}5 - P(A \cap B)$

dan $P(A \cup B) \leq 1$ maka $P(A \cap B)$ tidak mungkin sama dengan 0,1.

b) Nilai terkecil untuk $P(A \cap B)$ adalah 0,5.

c) Karena $A \cap B \subset A$ dan $A \cap B \subset$ B maka

$$P(A \cap B) \leq P(A) = 0{,}8$$

dan $P(A \cap B) \le P(B) = 0{,}7$ sehingga $P(A \cap B) \le 0{,}7$. Berarti $P(A \cap B)$ tidak mungkin 0,777.

d) Nilai terbesar untuk $P(A \cap B)$ adalah 0,7.

Soal 8

Misalkan bahwa bahwa kejadian A dan B adalah kejadian-kejadian sehingga $P(A) + P(B) > 1$.

(a) Apakah nilai terkecil yang mungkin untuk $P(A \cap B)$?

(b) Apakah nilai terbesar yang mungkin untuk $P(A \cap B)$?

Penyelesaian :

a) Karena

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

maka dan $P(A \cup B) \le 1$ maka $P(A \cap B)$ nilai terkecil yang mungkin adalah $P(A) + P(B) - 1$.

e) Karena $A \cap B \subset A$ dan $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subset \mathrm{B}$ maka

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \le \mathrm{P}(\mathrm{A})$$

dan $P(A \cap B) \le P(B)$ sehingga $P(A \cap B) \le \min\{P(A), P(B)\}$.

Berarti nilai terbesar dari $P(A \cap B)$ adalah $\min\{P(A), P(B)\}$.

Soal 9

Dapatkah A dan B saling asing jika $P(A) = 0{,}4$ dan $P(B) = 0{,}7$? Dapatkah A dan B saling asing jika $P(A) = 0{,}4$ dan $P(B) = 0{,}3$? Beri alasan.

Penyelesaian :

Jika $P(A) = 0{,}4$ dan $P(B) = 0{,}7$ dan kejadian A, B saling asing maka

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}4 + 0{,}7 = 1{,}1$$

sehingga A dan B tidak mungkin saling asing sedangkan jika $P(A) = 0{,}4$ dan $P(B) = 0{,}3$ dan kejadian A, B saling asing maka

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7.$$

Berarti hal itu dimungkinkan sehingga A dan B mungkin saling asing.

Soal 10

Jika A dan B saling bebas maka tunjukkan bahwa

a. A^c dan B juga saling bebas.

b. A dan B^c juga saling bebas.

c. A^c dan B^c juga saling bebas.

Bukti

a. Karena $A^c \cap B = B - (A \cap B)$ dan maka

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

dan karena A dan B saling bebas maka $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$ sehingga

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(B) - P(A)\, P(B) \\ &= P(B)\,(1 - P(A)) \\ &= P(B)\, P(A^c) \\ &= P(A^c)\, P(B). \end{aligned}$$

Hal itu berarti, kejadian B dan A^c saling bebas.

b. Analog dengan a.

c. Karena
$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P(\,(A \cup B)^c\,) \\ &= 1 - P(\,A \cup B\,) \\ &= 1 - (\,P(A) + P(B) - P(A \cap B)\,) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)\, P(B) \\ &= (\,1 - P(A))\,(1 - P(B)) \\ &= P(A^c)\, P(B^c) \end{aligned}$$

dengan mengingat A dan B saling bebas.

Soal 11

Misalkan $n(X)$ menyatakan banyaknya anggota himpunan X.
Jika $n(A \cup B) = 10$ dan $n(A) = 4$, maka tentukan nilai yang mungkin untuk $n(B)$.

Penyelesaian

Karena $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ maka

$$10 = 4 + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(B) - n(A \cap B) = 6$$

sehingga $0 \le n(A \cap B) \le n(B)$ atau $0 \le n(A \cap B) \le 4$. Akibatnya

$$6 \le n(B) \le 10.$$

Karena $n(B)$ adalah bilangan bulat tak negatif maka $n(B) = 6, 7, 8, 9$ atau 10.

Soal 12

Sebuah titik (x,y) diambil secara random dari dalam persegi panjang dengan titik sudut (0,0), (2,0), (2,1) dan (0,1). Berapakah probabilitas bahwa $x < y$?

Penyelesaian

Persegi panjang yang dimaksudkan dinyatakan dalam daerah yang diarsir dengan luas 2 satuan luas. Luas bagian di sebelah kiri garis $y = x$ ditunjukkan pada gambar dengan luas ½. Hal itu berarti bahwa titik (x,y) yang dipilih secara random dalam persegi panjang akan memiliki $x < y$ adalah (1/2)/2 = ¼.

Soal 13

Misalkan S adalah kumpulan permutasi dari bilangan 1, 2, 3, 4, 5 dengan suku pertama permutasi tersebut bukan 1. Sebuah permutasi dipilih secara random dari S. Probabilitas bahwa suku kedua dari permutasi yang dipilih adalah 2, dalam bentuk paling sederhana adalah a/b. Berapakah $a + b$?

Penyelesaian

Karena bilangan 1 tidak bisa menjadi suku pertama maka banyaknya cara membuat urutan permutasi yang dapat diterima adalah

$$4.4.3.2.1=96.$$

dan banyaknya cara sehingga angka 2 berada pada suku kedua dari permutasi yang dapat diterima adalah

$$3.1.3.2.1=18.$$

Akibatnya probabilitas bahwa 2 akan muncul sebagai suku kedua pada permutasi yang dapat diterima adalah 18/96 = 3/16. Hal itu berarti

$$a + b = 3 + 16 = 19.$$

Soal 14

Misalkan bahwa seorang perempuan dengan golongan darah tipe **O** dan golangan darah **AB** mempunyai pasangan kembar laki-laki dengan golongan darah tipe **B**. Jika diketahui bahwa mendekati seperempat dari semua pasangan kembar berasal dari satu telur, berapa probabilitasnya bahwa pasangan kembar ini berasal dari satu telur ?

Penyelesaian

Misalkan kejadian E adalah kejadian bahwa pasangan kembar berasal dari satu telur dan kejadian B adalah kejadian bahwa pasangan kembar anak mempunyai golongan darah tipe **B**. Akan ditentukan probabilitasnya bahwa pasangan kembar ini berasal dari satu telur dengan syarat bahwa pasangan kembar anak mempunyai golongan darah tipe **B** adalah

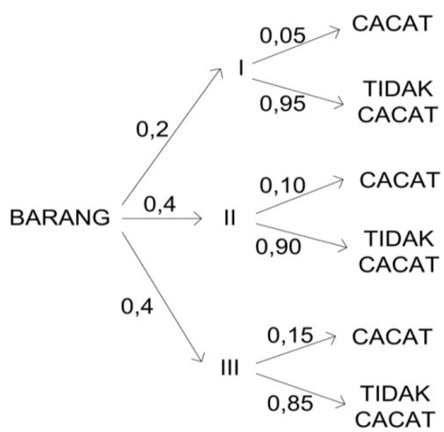
$$\begin{aligned} P(E|B) &= \frac{P(B\,|\,E)\,P(E)}{P(B\,|\,E)\,P(E)+P(B\,|\,E^c)\,P(E^c)} \\ &= \frac{(1/4)(1/2)}{(1/4)(1/2)+(3/4)(1/4)} \\ &= \frac{1/8}{5/16}. \\ &= \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Soal 15

Tiga mesin **I**, **II** dan **III** masing-masing menghasilkan 20 %, 40%, 40% dari jumlah seluruh produksi. Dari masing- masing terdapat 5 % , 10 % dan 15 % produk yang cacat. Satu produk diambil secara random dan diperiksa dan ternyata cacat. Berapa probabilitas bahwa produk tersebut dihasilkan oleh mesin **I** ?

Penyelesaian

Berdasarkan informasi di atas, dapat dibuat diagram pohon probabilitas berikut ini :



Gambar II.10 Diagram Pohon Probabilitas

Akibatnya probabilitas bahwa produk tersebut dihasilkan oleh mesin **I** dengan syarat produk tersebut cacat adalah

$$P(I \mid D) = \frac{P(D \mid I)\, P(I)}{P(D \mid I)\, P(I) + P(D \mid II)\, P(II) + P(D \mid III)\, P(I)}$$

$$= \frac{(0{,}05)(0{,}2)}{(0{,}05)(0{,}2) + (0{,}1)(0{,}4) + (0{,}15)(0{,}4)}$$

$$= \frac{0{,}01}{0{,}01 + 0{,}04 + 0{,}06}$$

$$= \frac{1}{11}.$$

LATIHAN

1. Jika $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ dan $P(A) < P(A|B)$ maka tunjukkan bahwa $P(B) < P(B|A)$.
2. Diketahui bahwa suatu ruang sampel dari 5 kejadian sederhana E_1, E_2, E_3, E_4 dan E_5.
   a. Jika $P(E_1) = P(E_2) = 0{,}15$, $P(E_3) = 0{,}4$ dan $P(E_4) = 2P(E_5)$ maka tentukan $P(E_4)$ dan $P(E_5)$.
   b. Jika $P(E_1) = 3P(E_2) = 0{,}3$ maka tentukan probabilitas dari kejadian sederhana yang lain jika diketahui bahwa ketiga kejadian yang lain mempunyai probabilitas yang sama untuk terjadi.
3. Jika dua kejadian A dan B sehingga $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}3$ dan $P(A \cap B) = 0{,}1$ maka tentukan :
   a. $P(A|B)$.
   b. $P(B|A)$.
   c. $P(A|A \cup B)$.
   d. $P(A|A \cap B)$.
   e. $P(A \cap B|A \cup B)$.
4. Misalkan A dan B adalah 2 kejadian dari ruang probabilitas berhingga S sehingga $P(A \cap B) = 1/5$, $P(A^c) = 1/3$ dan $P(B) = ½$.
   a. Tentukan $P(A \cup B)$.
   b. Tentukan $P(A^c \cap B^c)$.
5. Misalkan bahwa kejadian A dan B adalah kejadian-kejadian sehingga $P(A) = 0{,}6$ dan $P(B) = 0{,}3$.
   a. Apakah mungkin bahwa $P(A \cap B) = 0{,}1$? Beri alasan.
   b. Berapakah nilai terkecil untuk $P(A \cap B)$?
   c. Apakah mungkin bahwa $P(A \cap B) = 0{,}7$? Beri alasan.
   d. Berapakah nilai terbesar untuk $P(A \cap B)$?
6. Misalkan bahwa bahwa A dan B adalah kejadian-kejadian sehingga $P(A) + P(B) < 1$.
   a. Apakah nilai terkecil yang mungkin untuk $P(A \cap B)$?
   b. Apakah nilai terbesar yang mungkin untuk $P(A \cap B)$?
7. Jika A dan B adalah dua kejadian maka buktikan bahwa

$$P(A \cap B) \geq 1 - P(A^c) - P(B^c).$$

8. Jika A, B dan C adalah tiga kejadian maka buktikan bahwa

$$P(A \cap B \cap C) \geq 1 - P(A^c) - P(B^c) - P(C^c).$$

9. Jika A, B dan C adalah tiga kejadian yang mempunyai probabilitas yang sama maka berapakah nilai terkecil untuk $P(A)$ sehingga $P(A \cap B \cap C)$ selalu melebihi 0,95.
10. Disediakan 6 bilangan positif dan 8 bilangan negatif. Empat buah bilangan diambil secara random. Berapakah probabilitas bahwa perkalian empat bilangan tersebut akan merupakan bilangan positif ?
11. Jika x dan y adalah dua buah bilangan positif lebih dari 0 tapi kurang dari 4, berapakah probabilitas bahwa jumlah x dan y kurang dari 2 ?
12. Jika faktor positif dari 2014 diambil secara random, berapakah probabilitas yang terambil adalah bilangan bulat ?
13. Sebuah titik P dipilih secara random dari bagian dalam sebuah segi lima dengan titik sudut A(0,2), B(4,0), C($2\pi + 1$, 0), D($2\pi + 1$, 4) dan E(0,4). Berapakah probabilitas bahwa sudut APB adalah sebuah sudut tumpul ?
14. Pada sebuah dadu biasa, salah satu noktahnya dihilangkan secara random dengan kemungkinan yang sama bahwa setiap noktah akan terpilih. Dadu tersebut kemudian digulingkan. Berapakah probabilitas bahwa sisi yang muncul memiliki noktah berjumlah ganjil ?
15. Proporsi golongan darah **A**, **B**, **AB** dan **O** di suatu suku berturut-turut adalah 0,41; 0,10; 0,04 dan 0,45. Seseorang diambil dari populasi suku tersebut.
    a. Daftarlah ruang sampel dari eksperimen.
    b. Gunakan informasi tersebut untuk menentukan probabilitas dari masing-masing kejadian sederhana.
    c. Berapa probabilitas bahwa seseorang yang dipilih secara random dari populasi suku tersebut maka tentukan probabilitasnya mempunyai golongan darah **A** atau **AB**.
16. Suatu survei mengklasifikasikan sejumlah besar orang dewasa ke dalam apakah mereka perlu kaca mata baca dan apakah mereka

menggunakan kaca mata ketika membaca. Tabel berikut ini menyatakan proporsi dari masing-masing kategori :

Menggunakan kaca mata untuk membaca Perlu kaca mata	Ya	Tidak
Ya	0,44	0,14
Tidak	0,02	0,40

Jika seorang dewasa dipilih secara random dari sejumlah besar kelompok tersebut maka tentukan probabilitas kejadian yang didefinisikan sebagai berikut :

a. Perlu kaca mata.
b. Perlu kaca mata tetapi tidak menggunakan kaca mata.
c. Menggunakan kaca mata baik perlu kaca mata maupun tidak.

17. Jika diketahui kejadian A dan kejadian B sehingga $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,3$ dan $P(A \cap B) = 0,1$ maka tentukan :
    a. $P(A \mid B)$.
    b. $P(B \mid A)$.
    c. $P(A \mid A \cup B)$.
    d. $P(A \mid A \cap B)$.
    e. $P(A \cap B \mid A \cup B)$.
18. Jika A dan B adalah dua kejadian sehingga $B \subset A$ maka kenapa jelas bahwa $P(B) \leq P(A)$.
19. Misalkan bahwa $A \subset B$ dan $P(A) > 0$ dan $P(B) > 0$. Tunjukkan bahwa $P(B|A) = 1$ dan $P(A \mid B) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$.
20. Jika A dan B dua kejadian yang saling asing dan $P(B) > 0$ maka tunjukkan bahwa :

$$P(A \mid A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)}.$$

21. Jika $P(B) > 0$ maka :
    a. Tunjukkan bahwa $P(A|B) + P(A^c|B) = 1$.

b. Tunjukkan bahwa secara umum dua pernyataan berikut ini salah :
   (i) $P(A|B) + P(A|B^c) = 1$.
   (ii) $P(A|B) + P(A^c|B^c) = 1$.

22. Jika $P(B) = p$, $P(A^c|B) = q$ dan $P(A^c \cap B^c) = r$ maka tentukan :
    a. $P(A \cap B^c)$.
    b. $P(A)$.
    c. $P(B|A)$.
23. Tunjukkan bahwa untuk sebarang tiga kejadian A, B dan C dengan $P(C) > 0$ berlaku :
    $$P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C).$$
24. Jika kejadian A dan kejadian B saling bebas maka buktikan juga dua kejadian berikut juga saling bebas :
    a. A^c dan B,
    b. A dan B^c,
    c. A^c dan B^c.
25. Sebuah kotak berisi 3 kelereng dan 2 kelereng merah, sementara yang lain berisi 2 kelereng biru dan 5 kelereng merah. Sebuah kotak diambil secara random dari salah satu kotak adalah biru. Berapakah probabilitas bahwa kelereng biru tersebut berasal dari kotak pertama ?

*****