

REGRESI & KORELASI LINIER SEDERHANA

1. Pendahuluan

- Gagasan perhitungan ditetapkan oleh Sir Francis Galton (1822-1911)
- Persamaan regresi : Persamaan matematik yang memungkinkan peramalan nilai suatu peubah takbebas (*dependent variable*) dari nilai peubah bebas (*independent variable*)
- Diagram Pencar = *Scatter Diagram*
Diagram yang menggambarkan nilai-nilai observasi peubah takbebas dan peubah bebas.

Nilai peubah bebas ditulis pada sumbu X (sumbu horizontal)

Nilai peubah takbebas ditulis pada sumbu Y (sumbu vertikal)

Nilai peubah takbebas ditentukan oleh nilai peubah bebas

Anda sudah dapat menentukan mana peubah takbebas dan peubah bebas?

Contoh 1:

Umur Vs Tinggi Tanaman (X : Umur, Y : Tinggi)

Biaya Promosi Vs Volume penjualan (X : Biaya Promosi, Y : Vol. penjualan)

- Jenis-jenis Persamaan Regresi :
 - a. Regresi Linier :
 - Regresi Linier Sederhana
 - Regresi Linier Berganda
 - b. Regresi Nonlinier
 - Regresi Eksponensial

- Regresi Linier

- Bentuk Umum Regresi Linier Sederhana

$$Y = a + bX$$

Y : peubah takbebas

X : peubah bebas

a : konstanta

b : kemiringan

- Bentuk Umum Regresi Linier Berganda

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_nX_n$$

Y : peubah takbebas

X₁ : peubah bebas ke-1

X₂ : peubah bebas ke-2

X_n : peubah bebas ke-n

a : konstanta

b₁ : kemiringan ke-1

b₂ : kemiringan ke-2

b_n : kemiringan ke-n

- Regresi Non Linier
 - Bentuk umum Regresi Eksponensial

$$Y = ab^x$$

$$\log Y = \log a + (\log b) x$$

2. Regresi Linier Sederhana

- Metode Kuadrat terkecil (*least square method*): metode paling populer untuk menetapkan persamaan regresi linier sederhana

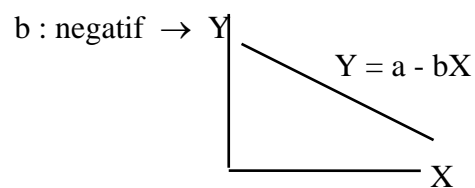
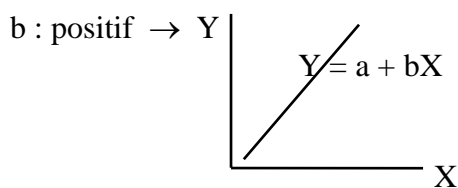
- Bentuk Umum Regresi Linier Sederhana :

$$Y = a + bX$$

Y : peubah takbebas
a : konstanta

X : peubah bebas
b : kemiringan

Nilai b dapat positif (+) dapat negatif (-)



- Penetapan Persamaan Regresi Linier Sederhana

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad \text{sehingga} \quad a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} - b \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

n : banyak pasangan data

y_i : nilai peubah takbebas Y ke-i

x_i : nilai peubah bebas X ke-i

Contoh 2:

Berikut adalah data Biaya Promosi dan Volume Penjualan PT BIMOIL perusahaan Minyak Goreng.

Tahun	x Biaya Promosi (Juta Rupiah)	y Volume Penjualan (Ratusan Juta Liter)	xy	x ²	y ²
1992	2	5	10	4	25
1993	4	6	24	16	36
1994	5	8	40	25	64
1995	7	10	70	49	100
1996	8	11	88	64	121
Σ	Σx = 26	Σy = 40	Σxy = 232	Σx ² = 158	Σy ² = 346

bentuk umum persamaan regresi linier sederhana : $Y = a + b X$

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = \frac{(5 \times 232) - (26 \times 40)}{(5 \times 158) - (26^2)} = \frac{1160 - 1040}{790 - 676} = \frac{120}{114} = 1.0526 = 1.053$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} - b \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$a = \frac{40}{5} - \left(1.05263... \times \frac{26}{5} \right) = 8 - (1.05263... \times 5.2) = 8 - 5.4736... = 2.5263... = 2.530$$

$$Y = a + b X \quad \rightarrow \quad Y = 2.530 + 1.053 X$$

- Peramalan dengan Persamaan Regresi

Contoh 3 :

Diketahui hubungan Biaya Promosi (X dalam Juta Rupiah) dan Y (Volume penjualan dalam Ratusan Juta liter) dapat dinyatakan dalam persamaan regresi linier berikut

$$Y = 2.530 + 1.053 X$$

Perkirakan Volume penjualan jika dikeluarkan biaya promosi Rp. 10 juta ?

Jawab : $Y = 2.530 + 1.053 X$
 $X = 10$

$$Y = 2.53 + 1.053 (10) = 2.53 + 10.53 = 13.06 \text{ (ratusan juta liter)}$$

Volume penjualan = 13.06 x 100 000 000 liter

3. Korelasi Linier Sederhana

- Koefisien Korelasi (r) : ukuran hubungan linier peubah X dan Y

Nilai r berkisar antara (+1) sampai (-1)

Nilai r yang (+) ditandai oleh nilai b yang (+)

Nilai r yang (-) ditandai oleh nilai b yang (-)

Jika nilai r mendekati +1 atau r mendekati -1 maka

X dan Y memiliki korelasi linier yang tinggi

Jika nilai $r = +1$ atau $r = -1$ maka X dan Y memiliki korelasi linier sempurna

Jika nilai $r = 0$ maka X dan Y tidak memiliki relasi (hubungan) linier

(dalam kasus r mendekati 0, anda dapat melanjutkan analisis ke regresi eksponensial)

- Koefisien Determinasi Sampel = $R = r^2$

Ukuran proporsi keragaman total nilai peubah Y yang dapat dijelaskan oleh nilai peubah X melalui hubungan linier.

Penetapan & Interpretasi Koefisien Korelasi dan Koefisien Determinasi

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{\sqrt{\left[n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] \left[n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right]}}$$

$$R = r^2$$

Contoh 4 :

Lihat Contoh 2, setelah mendapatkan persamaan Regresi $Y = 2.530 + 1.053 X$, hitung koef. korelasi (r) dan koef determinasi (R).

Gunakan data berikut (lihat Contoh 2)

$$\Sigma x = 26 \quad \Sigma y = 40 \quad \Sigma xy = 232 \quad \Sigma x^2 = 158 \quad \Sigma y^2 = 346$$

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{\sqrt{\left[n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] \left[n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right]}}$$

$$r = \frac{(5 \times 232) - (26 \times 40)}{\sqrt{[(5 \times 158) - (26^2)] \times [(5 \times 346) - (40^2)]}} = \frac{1160 - 1040}{\sqrt{[790 - 676] \times [1730 - 1600]}} = \frac{120}{\sqrt{114 \times 130}}$$

$$= \frac{120}{\sqrt{14820}} = \frac{120}{121.73...} = 0.9857...$$

Nilai $r = 0.9857$ menunjukkan bahwa peubah X (biaya promosi) dan Y (volume penjualan) berkorelasi linier yang positif dan tinggi

$$R = r^2 = 0.9857...^2 = 0.97165... = 97 \%$$

Nilai $R = 97\%$ menunjukkan bahwa 97% proporsi keragaman nilai peubah Y (volume penjualan) dapat dijelaskan oleh nilai peubah X (biaya promosi) melalui hubungan linier.

Sisanya, yaitu 3 % dijelaskan oleh hal-hal lain.

4. Regresi Linier Berganda

- Pembahasan akan meliputi regresi linier dengan 2 Variabel Bebas (X_1 dan X_2) dan 1 Variabel Tak Bebas (Y).

- Bentuk Umum : $Y = a + b_1 X_1 + b_2 X_2$

Y	: peubah takbebas	a	: konstanta
X_1	: peubah bebas ke-1	b_1	: kemiringan ke-1
X_2	: peubah bebas ke-2	b_2	: kemiringan ke-2

- a , b_1 dan b_2 didapatkan dengan menyelesaikan tiga persamaan Normal berikut:

$$(i) \quad n a + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$(ii) \quad a \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} x_{1i} = \sum_{i=1}^n x_{1i} y_i$$

$$(iii) \quad a \sum_{i=1}^n x_{2i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{2i} x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 = \sum_{i=1}^n x_{2i} y_i$$

n : banyak pasangan data

x_{1i} : nilai peubah bebas X_1 ke-i

y_i : nilai peubah takbebas Y ke-i

x_{2i} : nilai peubah bebas X_2 ke-i

Contoh 4:

Berikut adalah data Volume Penjualan (juta unit) Mobil dihubungkan dengan variabel biaya promosi (X_1 dalam juta rupiah/tahun) dan variabel biaya penambahan asesoris (X_2 dalam ratusan ribu rupiah/unit).

X_1	X_2	y	$X_1 X_2$	$X_1 y$	$X_2 y$	X_1^2	X_2^2	y^2
2	3	4	6	8	12	4	9	16
3	4	5	12	15	20	9	16	25
5	6	8	30	40	48	25	36	64
6	8	10	48	60	80	36	64	100
7	9	11	63	77	99	49	81	121
8	10	12	80	96	120	64	100	144
$\sum x_1 =$ 31	$\sum x_2 =$ 40	$\sum y =$ 50	$\sum x_1 x_2 =$ 239	$\sum x_1 y =$ 296	$\sum x_2 y =$ 379	$\sum x_1^2 =$ 187	$\sum x_2^2 =$ 306	$\sum y^2 =$ 470

Tetapkan Persamaan Regresi Linier Berganda $y = a + b_1 X_1 + b_2 X_2$

$n = 6$

$$\begin{aligned} \sum x_1 &= 31 & \sum x_2 &= 40 & \sum y &= 50 \\ \sum x_1 x_2 &= 239 & \sum x_1 y &= 296 & \sum x_2 y &= 379 \\ \sum x_1^2 &= 187 & \sum x_2^2 &= 306 & \sum y^2 &= 470 \end{aligned}$$

Masukkan notasi-notasi ini dalam ketiga persamaan normal,

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad n a + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} &= \sum_{i=1}^n y_i \\ \text{(ii)} \quad a \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} x_{1i} &= \sum_{i=1}^n x_{1i} y_i \\ \text{(iii)} \quad a \sum_{i=1}^n x_{2i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{2i} x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 &= \sum_{i=1}^n x_{2i} y_i \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan tiga persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad 6a + 31 b_1 + 40 b_2 &= 50 \\ \text{(ii)} \quad 31 a + 187 b_1 + 239 b_2 &= 296 \\ \text{(iii)} \quad 40 a + 239 b_1 + 306 b_2 &= 379 \end{aligned}$$

Lakukan Eliminasi, untuk menghilangkan (a)

$$\begin{array}{rclclcl}
 \text{(ii)} & 31 a & + & 187 b_1 & + & 239 b_2 & = & 296 & \times 6 \\
 \text{(i)} & 6a & + & 31 b_1 & + & 40 b_2 & = & 50 & \times 31 \\
 \\
 \text{(ii)} & ~~189 a~~ & + & 1122 b_1 & + & 1434 b_2 & = & 1776 \\
 \text{(i)} & ~~189 a~~ & + & 961 b_1 & + & 1240 b_2 & = & 1550 & \\
 \hline
 & & & \text{(iv)} & 161b_1 & + & 194 b_2 & = & 226
 \end{array}$$

Lalu

$$\begin{array}{rclclcl}
 \text{(iii)} & 40 a & + & 239 b_1 & + & 306 b_2 & = & 379 & \times 6 \\
 \text{(i)} & 6a & + & 31 b_1 & + & 40 b_2 & = & 50 & \times 40 \\
 \\
 \text{(iii)} & ~~240 a~~ & + & 1434 b_1 & + & 1836 b_2 & = & 2274 \\
 \text{(i)} & ~~240 a~~ & + & 1240 b_1 & + & 1600 b_2 & = & 2000 & \\
 \hline
 & & & \text{(v)} & 194 b_1 & + & 236 b_2 & = & 274
 \end{array}$$

Selanjutnya, eliminasi (b_1) dan dapatkan nilai (b_2)

$$\begin{array}{rclclcl}
 \text{(v)} & 194 b_1 & + & 236 b_2 & = & 274 & \times 161 \\
 \text{(iv)} & 161 b_1 & + & 194 b_2 & = & 226 & \times 194 \\
 \\
 \text{(v)} & ~~31234 b_1~~ & + & 37996 b_2 & = & 44114 \\
 \text{(iv)} & ~~31234 b_1~~ & + & 37636 b_2 & = & 43844 \\
 \hline
 & & & 360 b_2 & = & 270 \\
 & & & b_2 & = & 0.75
 \end{array}$$

Dapatkan Nilai (b_1) dan nilai (a) dengan melakukan substitusi, sehingga:

$$\text{(v)} \quad 194 b_1 + 236 b_2 = 274$$

Perhatikan $b_2 = 0.75$

$$\begin{array}{rclcl}
 194 b_1 & + & 236 (0.75) & = & 274 \\
 194 b_1 & + & 177 & = & 274 \\
 & & 194 b_1 & = & 97 \\
 & & b_1 & = & 0.50
 \end{array}$$

$$\text{(i)} \quad 6a + 31 b_1 + 40 b_2 = 50$$

Perhatikan $b_1 = 0.50$ dan $b_2 = 0.75$

$$\begin{array}{rclcl}
 6a & + & 31(0.50) & + & 40 (0.75) & = & 50 \\
 6a & + & 15.5 & + & 30 & = & 50 \\
 & & & & 6a & = & 4.5 \\
 & & & & a & = & 0.75
 \end{array}$$

Sehingga Persamaan Regresi Berganda

$$a + b_1 X_1 + b_2 X_2 \quad \text{dapat ditulis sebagai } 0.75 + 0.50 X_1 + 0.75 X_2$$

5. Korelasi Linier berganda

- Koefisien Determinasi Sampel untuk Regresi Linier Berganda diberi notasi sebagai berikut

$$R_{y.12}^2$$

- Sedangkan Koefisien Korelasi adalah akar positif Koefisien Determinasi atau

$$r_{y.12} = \sqrt{R_{y.12}^2}$$

- Rumus

$$R_{y.12}^2 = 1 - \frac{JKG}{(n-1)s_y^2}$$

JKG : Jumlah Kuadrat Galat

s_y^2 : Jumlah Kuadrat y (terkoreksi)

di mana

$$s_y^2 = \frac{n \sum y^2 - (\sum y)^2}{n(n-1)}$$

$$JKG = \sum y^2 - a \sum y - b_1 \sum x_1 y - b_2 \sum x_2 y$$

Contoh 5:

Jika diketahui (dari Contoh 4)

$$n = 6$$

$$\sum x_1 = 31$$

$$\sum x_2 = 40$$

$$\sum y = 50$$

$$\sum x_1 x_2 = 239$$

$$\sum x_1 y = 296$$

$$\sum x_2 y = 379$$

$$\sum x_1^2 = 187$$

$$\sum x_2^2 = 306$$

$$\sum y^2 = 470$$

Maka tetapkan $R_{y.12}^2$ dan jelaskan artinya nilai tersebut!

$$s_y^2 = \frac{n \sum y^2 - (\sum y)^2}{n(n-1)} = \frac{6(470) - (50)^2}{6(6-5)} = \frac{2820 - 2500}{30} = \frac{320}{30} = 10.667$$

$$\begin{aligned} JKG &= \sum y^2 - a \sum y - b_1 \sum x_1 y - b_2 \sum x_2 y = 470 - 0.75(50) - 0.5(296) - 0.75(379) \\ &= 470 - 37.5 - 148 - 284.25 \\ &= 0.25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{y.12}^2 &= 1 - \frac{JKG}{(n-1)s_y^2} = 1 - \frac{0.25}{5 \times 10.667} = 1 - \frac{0.25}{53.333} \\ &= 1 - 0.0046875 \\ &= 0.9953125 \\ &= 99.53\% \end{aligned}$$

Nilai $R_{y.12}^2 = 99.53\%$ menunjukkan bahwa 99.53% proporsi keragaman nilai peubah Y (volume penjualan) dapat dijelaskan oleh nilai peubah X (biaya promosi) dan X_2 (biaya aksesoris) melalui hubungan linier.

Sisanya sebesar 0.47% dijelaskan oleh hal-hal lain.

⊕ *Selesai* ⊕